Série A, ORSAY
N° d'ordre :
153
oooooo

Inscrit aux archives originales
du Centre de Documentation
C.N.R.S. sous le N° 1246

# THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le grade de

*DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES*

par

Pierre C. SABATIER

1ère Thèse

## LE PROBLEME INVERSE A ENERGIE DONNEE EN MECANIQUE QUANTIQUE

2ème Thèse : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le 25 avril 1966 devant la Commission d'Examen

MM. M. LEVY — *Président*

J. FRIEDEL
B. JANCOVICI
K. CHADAN — *Examinateurs*

Série A, ORSAY
N° d'ordre :
153
oooooo

# THÈSES

présentées à la

FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY
UNIVERSITÉ DE PARIS

pour obtenir le grade de

*DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES*

par

Pierre C. SABATIER

1ère Thèse

## LE PROBLEME INVERSE A ENERGIE DONNEE EN MECANIQUE QUANTIQUE

**2ème Thèse** : *Propositions données par la Faculté*

Soutenues le 25 avril 1966 devant la Commission d'Examen

MM. M. LEVY — *Président*

J. FRIEDEL
B. JANCOVICI
K. CHADAN — *Examinateurs*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

# FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

## - PROFESSEURS -

Doyen M. ZAMANSKY

| | |
|---|---|
| BRELOT | T analyse supérieure |
| PRENANT | T anatomie et histologie comparée |
| GRASSE | T évolution des êtres organisés |
| PREVOST | T chimie organique |
| WYART | T minéralogie et cristallog. |
| TEISSIER | T zoologie |
| MANGENOT | T biologie végétale (Orsay) |
| AUGER | T physique quantique et relativité |
| MONNIER | T physiologie générale |
| PIVETEAU | T paléontologie |
| ROCARD | T physique (ENS) |
| CARTAN | T mathématiques (ENS) |
| LAFFITTE | T chimie générale |
| N... | T géométrie supérieure |
| COULOMB | T physique du globe |
| Mlle COUSIN | T biologie animale SPCN |
| CHRETIEN | T chimie minérale |
| BOCQUET | T zoologie |
| KASTLER | T physique(ENS) |
| EPHRUSSI | T génétique |
| RIVIERE | T géologie SPCN et sédimento. (Orsay) |
| GAUTHERET | T biologie végétale PCB |
| LUCAS R. | T recherches physiques |
| THOMAS A. | T biologie cellulaire |
| ARNULF | T optique appliquée |
| MORAND | T physique enseignement |
| SOLEILLET | T physique PCB |
| FORTIER | T mécanique expérimentale des fluides |
| DRACH | T zoologie |
| QUENEY | T météorologie et dynamique atmosph. |
| GALLIEN | T embryologie |
| EICHHORN | T botanique |
| DE CUGNAC | T biologie végétale SPCN |
| Mlle CAUCHOIS | T chimie physique |
| THELLIER | T physique du globe |
| L'HERITIER | T biologie générale (Orsay) |
| GRIVET | T radioélectricité (Orsay) |
| PONCIN | T mécanique générale |
| DUBREIL | T arithm. et théorie des nombres |
| CHAMPETIER | T chimie macromoléculaire |
| CUVILLIER | T micropaléontologie |
| JUNG | T géologie |
| TRILLAT | T microscopie et diffraction électronique |
| WIEMANN | T chimie organique et structurale |
| JACQUINOT | T spectroscopie et physique céleste (Orsay) |
| VASSY | T physique de l'atmosphère |
| DESTOUCHES | T théories physiques |
| AMIEL | T chimie générale |
| HOCART | T minéralogie et cristallographie |
| MATHIEU J.P. | T physique optique |
| COUTEAUX | T cytologie |
| MAY | T zoologie |
| CHOQUET | T théorie des fonctions et topologie |
| | |
| FELDMANN | T biologie végétale marine |
| GUINIER | T physique des solides (Orsay) |
| JOST | T physiologie comparée |
| FORTET | T calcul des probabilités et phy. math. |
| SCHWARTZ | T calcul dif. et intégral |
| CHOUARD | T physiologie végétale |
| MALAVARD | T aviation (techn. aéron.) |
| NORMANT | T synthèse organique |
| BENARD | T chimie minérale |
| BUVAT | T botanique (ENS) |
| DUGUE | T statistiques mathématiques |
| SOULAIRAC | T psychophysiologie |
| ULRICH | T physiologie végétale appl. |
| MARECHAL | T optique théor. et appl. |
| KIRRMANN | T théories chimiques |
| CHADEFAUD | T botanique |
| Mlle LE BRETON | T physiologie de la nutrit. |
| LELONG | T application de l'analyse à la géom. |
| DEVILLERS | T anatomie et histologie comparée |
| EHRESMANN | T topologie algébrique |
| FRANCON | T physique SPCN |
| GLANGEAUD | T géographie phys. et géologie dynam. |
| DODEMENT | T mathématiques MGP |
| PISOT | T techniques mathématiques de la phys. |
| QUELET | T chimie organique |
| CAGNIARD | T géophysique appliquée |
| LENNUIER | T physique MGP |
| RIZET | T génétique (Orsay) |
| ROUTHIER | T géologie appliquée |
| Mme TONNELAT | T physique théorique |
| DIXMIER | T mathématiques MPC |
| SOUCHAY | T chimie générale |
| AIGRAIN | T électrotechnique générale |
| BRUSSET | T chimie systématique |
| LEVY M. | T physique théorique et htes énergies (Orsay) |
| Mme CHAIX | T chimie biologique |
| Mme HUREL PY | T biologie végétale PCB |
| PANNETIER | T chimie générale |
| BRUN | T mécanique des fluides I |
| LEDERER | T chimie biologique (Orsay) |
| Mme DUBREIL | T mathématiques (agrégat) |
| Mme LELONG | T mathématiques II (ENS) |
| BELLAIR | T géologie SPCN |
| COTTE | T physique électricité |
| DUBOIS J.E. | T chimie organique |
| LAMOTTE | T zoologie (ENS) |
| MICHEL A. | T chimie minérale (Orsay) |
| OLMER | T énergétique générale |
| ROUAULT | T électricité (Orsay) |
| GAUTHIER | T mécanique appliquée |
| BARCHEWITZ | T chimie physique |
| BROSSEL | T physique atomique |
| BUSER | T physiologie comparée |
| CAMUS | T physiologie végétale |
| CASTAING | T physique II thermodynamique (Orsay) |

| | |
|---|---|
| CURIEN | T minéralogie et cristallographie |
| MOYSE | T physiologie végétale (Orsay) |
| Mme CHARNIAUX-COTTON | T évolution des êtres organisés |
| POSSOMPES | T zoologie |
| PULLMANN | T chimie quantique |
| TEILLAC | T physique nucléaire et radioact. (Orsay) |
| TONNELAT | T biologie-physico-chimique (Orsay) |
| VILLE | T économétrie |
| WILLEMART | T chimie PCB |
| DODE | T chimie (Orsay) |
| FREYMANN | T recherches physiques |
| GUINOCHET | T biologie végétale SPCN (Orsay) |
| ROCH | T géologie |
| SCHATZMANN | T astrophysique |
| TERMIER | T géologie générale |
| ZAMANSKY | T mathématiques générales |
| LUCAS | T géologie |
| ALLARD | T chimie physique |
| BERTHELOT | T physique des particules fondamentales (Ors.) |
| BRICARD | T météorol. et physique de l'atmosphère (Ors.) |
| Mme ALBE FESSARD | T psycho-physiologie |
| FRIEDEL | T physique des solides (Orsay) |
| JULIA M. | T études des molécul. naturelles complexes |
| LENDER | T biologie animale SPCN (Orsay) |
| MAGAT | T physico-chimie des radio-éléments |
| Mlle QUINTIN | T électrochimie |
| MONOD | T chimie du métabolisme |
| BENOIT | T physiologie animale (Orsay) |
| DE POSSEL | T analyse numérique |
| CHARLOT | T chimie analytique |
| LEMEE | T écologie végétale (Orsay) |
| GUERIN | T chimie MPC (Orsay) |
| CHATELET | T chimie PCB |
| JEAN | T physique nucléaire (Orsay) |
| MATTLER | T physique SPCN |
| BERGERARD | T zoologie (Orsay) |
| BERTEIN | T électronique (Orsay) |
| BOUISSIERES | T radiochimie |
| Mme COUTURE | T thermodyn. et méca. phys. |
| ELLEMBERGER | T géologie des grandes régions du globe (Ors.) |
| FRANC | T biologie animale PCB |
| SCHNELL | botanique tropicale |
| STLKOWSKI | T physiologie végétale |
| ACHER | T chimie biologique |
| BAUDOIN | T biologie animale PCB |
| BEAUMONT | biologie animale SPCN |
| BLAMONT | géophysique ionosphère |
| BOUREAU | T botanique |
| CURIE D. | physique MGP |
| DURAND DELGA | T géologie |
| FREON | T chimie organique (Orsay) |
| HELLER | T physiologie végétale |
| TORTRAT | T calcul des probabilités |
| CAILLEUX | T géologie SPCN |
| MAGNAN | physique électricité |
| | |
| DAUDEL | T mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théor. et à la phys. nucléaire |
| ROLLET | T chimie minérale |
| Mlle JOSIEN | T chimie SPCN |
| CHEVALLEY | T géométrie algèbrique et théorie des groupes |
| ARNOULT | T électronique (Orsay) |
| CHAPELLE | T physique I (Orsay) |
| DELANGE | T mathématiques I (Orsay) |
| DENY | T mathématiques générales (Orsay) |
| GERMAIN | T mécanique théorique des fluides |
| LACOMBE | T métallurgie des métaux nucléaires (Orsay) |
| BROCHARD | T physique MGP (Orsay) |
| CABANNES | T mécanique générale |
| LESIEUR | T mathématiques I (Orsay) |
| MAZET | T mécanique générale (Orsay) |
| CAIRE | géographie phys. et géol. dynamique |
| COMOLET | mécanique des fluides |
| CORABOEUF | T physiologie animale (Orsay) |
| DELLOUE | T physique de l'exosphère |
| GORENFLOT | botanique II (Orsay) |
| HOUILLON | biologie animale PCB |
| JULLIEN J. | chimie SPCN (Orsay) |
| MALGRANGE | T techniques math. de la phys. (Orsay) |
| OLIVIER | anthropologie |
| NOZERAN | T botanique II (Orsay) |
| BLANC LAPIERRE | T physique ENS (Orsay) |
| CHEVAUGEON | T botanique (Orsay) |
| KAHANE | T mathématiques (Orsay) |
| SAMUEL | T mathématiques ENS féminine |
| KOURGANOFF | T astronomie (Orsay) |
| THIRY | T mécanique céleste |
| ABELES | physique SPCN |
| AMAT | T physique PCB |
| AUBOIN | T géologie |
| Mme BENOIST-GUEUTAL | T physique nucléaire et radioactivité (Orsay) |
| BOUGIS | biologie marine Villefranche s/Mer |
| BRUHAT | T mathématiques MPC |
| BRUNN | T géologie historique (Orsay) |
| CHABBAL | T physique MGP (Orsay) |
| DEHEUVELS | T mathématiques propédeutique |
| D'ESPAGNAT | T physique théorique (Orsay) |
| FURON | T géologie SPCN |
| Mme GANS | T génétique |
| GENEVES | biologie végétale PCB |
| GUILBERT | physique CSU Orléans |
| HUPE | T pétrographie |
| HOLLANDE | T biologie générale |
| LIONS | T analyse numérique |
| MAITTE | T chimie PCB |
| MEYER | physique propédeutique |
| NICOLAS | géologie appliquée |

| | |
|---|---|
| PANIGEL | biologie générale |
| Mlle FOURCROY | biologie végétale SPCN |
| Mme CHOQUET-BRUHAT | T mécanique analytique et mécanique céleste |
| Mlle VEIL | T physiologie générale |
| LWOFF | T microbiologie |
| SIESTRUNCK | T mécanique physique et expérimentale |
| NERON | T mathématiques MPC (Orsay) |
| Mme PECKER-WIMEL | T astrophysique |
| BALKANSKY | physique MPC |
| LE CORRE | T électricité |
| DELCROIX | T physique des milieux ionisés |
| GOURDIN | physique théorique et htes énergies (Ors.) |
| LEHMANN | T physique expérimentale des htes énergies |
| NATAF | T physique nucléaire et radioactivité (Orsay) |
| ECHALIER | biologie animale PCB |
| BARRAUD | physiologie cellulaire |
| LIORET | T physiologie végétale (Orsay) |
| DARS | géologie structurale et géologie appliquée |
| CAMEFORT | T botanique (agrégation) |
| VICHNIEWSKY | T mécanique industrielle |
| BLAQUIERE | électronique (Orsay) |
| ARNOUS | T physique théorique |
| TATIBOUET | chimie CSU Orléans |
| MALLIAVIN | T mathématiques propédeutique (Orsay) |
| GAUDEMAR | chimie propédeutique |
| PEREZ Y JORBA | physique expérimentale des htes énergies (Ors.) |
| DAVID | T chimie (agrégation Orsay) |
| BROUSSE | T mécanique théorique |
| ROSCH | T astronomie |
| GUY | T physique expérimentale |
| LAZARD | mathématiques MPC |
| MOREL P. | physique MPC |
| ARSAC | programmation |
| LEFEBVRE | chimie MPC |
| CHAPEVILLE | biochimie |
| BENOIT | physique CPEM |
| RIO | chimie CPEM |
| JAUZEIN | géologie (ENS) |
| PREVOST G. | biologie végétale CPEM |
| FAVARD P. | biologie animale CPEM |
| VILKAS | chimie CPEM |
| Mlle FICINI | chimie CPEM |
| LEQUEUX | astronomie |
| COHEN TANNOUDJI | physique MPC |
| TAVERNIER | physique CPEM |
| Mme ROIZEN | physique CPEM |
| DURAND M. | biologie animale SPCN |
| RAVIER | pétrographie |
| ROSEAU | T mécanique théorique des fluides |
| ROUBINE | électronique |
| SILBER | T chimie PCB |
| UEBERSFELD | T électronique |
| YVON | T théories physiques |
| HERVE | T mathématiques |
| JANCOVICI | physique atomique (Orsay) |
| FALK-VAIRANT | physique nucléaire (Orsay) |
| FETIZON | chimie propédeutique (Orsay) |
| CERF | mathématiques (Orsay) |
| PASCAUD | physiologie |
| Mme PETIT | biologie animale CPEM |
| BROUSSE | géologie (Orsay) |
| CAGNAC | physique agrégation (Orsay) |
| LEBERRE | zoologie (Orsay) |
| SCHAEFFER | microbiologie (Orsay) |
| DE GENNES | physique des solides (Orsay) |
| RIOU | physique nucléaire expérimentale (Orsay) |
| CLAUSER | chimie biologique (Orsay) |
| CHEVALIER | physiologie animale (Orsay) |

*Le secrétaire général : R. POULLAIN.*

*J'ai eu la chance de passer ma première année de formation pour la recherche à l'université de Princeton. Je tiens à remercier Monsieur le Professeur E.P. Wigner pour sa courtoisie et la qualité des conseils qu'il m'a donnés pendant cette année.*

*Je suis heureux d'exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Maurice Lévy qui m'a accueilli ensuite dans son laboratoire. Il m'a fourni ainsi les meilleurs éléments d'un travail scientifique : l'amitié et l'aide, morale ou matérielle, d'un groupe de chercheurs. Parmi ceux-ci, je tiens à remercier spécialement Messieurs les Professeurs K. Chadan et B. Jancovici, qui ont bien voulu lire tout ou partie du présent travail.*

*Je tiens également à reconnaître ici l'honneur que m'a fait Monsieur le Professeur Friedel en acceptant de faire partie du jury de cette thèse.*

*Enfin les nombreuses difficultés que cause l'impression d'une thèse ont été bien allégées pour moi par la gentillesse des personnes qui en ont eu la charge. Je veux les remercier ici tous et toutes, en les priant de m'excuser si je ne peux les citer nommément.*

*Pierre C. SABATIER*

*TABLE DES MATIERES*

*REMERCIEMENTS*

*TABLE DES MATIERES* Pages

*INTRODUCTION GENERALE* . . . . . 1

*PREMIERE PARTIE - APPROCHE FORMELLE*

INTRODUCTION . . . . . 9

CHAPITRE I - Etude asymptotique des potentiels de Newton . . . . . 15
I.1 - Etudes préliminaires . . . . . 17
I.2 - Construction des outils mathématiques de la théorie . . . . . 27
I.3 - Construction et comportement asymptotique des potentiels . . . . . 33

CHAPITRE II - Propriétés analytiques des potentiels et des fonctions de Jost obtenus par la méthode de Newton . . . . . 49
II.1 - Prolongement analytique des potentiels . . . . . 51
II.2 - Définition et propriétés analytiques des fonctions de Jost . . . . . 61

CHAPITRE III - Une méthode générale . . . . . 71
III.1 - Une classe très générale de potentiels . . . . . 73
III.2 - Le problème inverse . . . . . 79
III.3 - Propriétés descriptives des potentiels et fonctions de Jost . . . . . 87

*DEUXIEME PARTIE - APPROCHE ASYMPTOTIQUE*

INTRODUCTION . . . . . 91

CHAPITRE IV - La théorie semi-classique de la diffusion . . . . . 97
IV.1 - Les sections efficaces de diffusion classique . . . . . 97
IV.2 - Théorie semi-classique de la diffusion . . . . . 100

CHAPITRE V - Théorie asymptotique de la diffusion . . . . . 113
V.1 - Evaluation asymptotique du déphasage . . . . . 114
V.2 - Une forme intégrale pour l'amplitude de diffusion . . . . . 123
V.3 - L'amplitude de diffusion . . . . . 130
V.4 - Estimation des erreurs - Amélioration des résultats . . . . . 137

CHAPITRE VI- Applications de la théorie semi-classique au problème inverse . . . 145
VI.1 - Le problème inverse dans la théorie semi-classique . . . . . 145
VI.2 - Les oscillations des distributions angulaires . . . . . 155
VI.3 - Les énergies hypocritiques . . . . . 159
VI.4 - Autres applications possibles . . . . . 168

*CONCLUSION* . . . . . 171

*APPENDICES*

APPENDICES A . . . . . 175

APPENDICES B . . . . . 204

APPENDICE C . . . . . 212

*REFERENCES* . . . . . 215

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546026_0022

## INTRODUCTION GENERALE

*Notre connaissance est, nécessairement, toujours limitée ; mais le connaissable est illimité. Plus grande est notre sphère de connaissance, plus étendue aussi la surface de contact avec notre infinie ignorance.*

*John Hopkinson* (1)

Qu'il les considère comme des réalités profondes ou comme des constructions commodes, le physicien théoricien doit étudier et définir des concepts qui permettent de "prévoir et de décrire, d'une manière complète et aussi simple que possible (2)", les faits expérimentaux. Le concept de fonction potentielle, dans le cadre de la mécanique classique d'abord, quantique ensuite, s'est révélé particulièrement utile pour décrire l'ensemble des phénomènes qui perturbent le mouvement d'un corps donné lorsqu'il passe à proximité d'un ou de plusieurs autres. Ces phénomènes, que l'on désigne aujourd'hui soit sous l'appellation ambiguë de "phénomènes de diffusion", soit sous celle, dont le sens s'est ainsi élargi, de "phénomènes de collision", ont pris en physique moderne une importance considérable du fait que leur étude est presque le seul moyen d'investigation du monde nucléaire ou subnucléaire. Cependant le concept de potentiel, admis d'abord comme une des réalités profondes de la physique classique, a perdu peu à peu ce caractère. L'inexistence de tout support matériel a rendu absurde l'interprétation qu'il donnait des interactions à distance. La théorie des photons et des électrons, la théorie quantique des champs, et les nouvelles particules qu'elle a permis de découvrir, ont donné un mécanisme des interactions à la fois satisfaisant sur le plan logique et acceptable quant aux prédictions de faits expérimentaux. Toutefois, le potentiel est resté un moyen simple pour classer les résultats expérimentaux, équivalent (3) à ces concepts plus raffinés dans un très large éventail d'énergies (grosso modo le domaine non-relativiste), et beaucoup plus commode.

Même dans le domaine où elle conserve ainsi une place, la notion de potentiel a rencontré des difficultés. Certaines, dans le simple problème à deux corps, sont venues de l'existence possible de plusieurs voies de réaction, c'est-à-dire la possibilité d'obtenir après collision un système différent en nature et en énergie du système initial. L'introduction d'une partie imaginaire au potentiel a permis, en général, de reproduire même dans ces cas les résultats expérimentaux, la partie imaginaire rendant compte globalement de l'influence des voies de réaction sur la voie d'entrée, ou voie de diffusion élastique. On obtient ainsi le modèle optique, qui a été utilisé avec succès également à des énergies plus élevées, voire relativistes. Il reste encore, grâce à sa simplicité, l'un des moyens les plus utiles pour interpréter ou prévoir rapidement les résultats d'une expérience de collision.

C'est sans doute en physique nucléaire que la notion de potentiel d'interaction a subi les plus grandes vicissitudes. Le problème de la diffusion d'un neutron ou d'un proton par un noyau est, évidemment, un problème à plusieurs corps. Si l'on admet la validité de la mécanique quantique non relativiste, il doit être possible de le traiter en insérant dans l'hamiltonien du système tout un ensemble de potentiels d'interaction à deux ou plusieurs corps. Ce programme était irréalisable pour les physiciens des années 30, qui cherchèrent à décrire les phénomènes observés à l'aide d'un simple potentiel central. Très rapidement, ce modèle s'est révélé insuffisant. Il était rigoureusement incapable d'expliquer les résonances très étroites observées par exemple dans la diffusion des neutrons lents. Un modèle complètement différent, proposé par Bohr [4] en 1936, et développé ensuite par Bethe [5], Breit, Wigner [6], et Weisskopff [7][8], expliquait ces résonances étroites par la formation intermédiaire, au cours de la collision, d'un état métastable de l'ensemble noyau-particule incidente, de durée de vie relativement longue, le "noyau composé". Les résonances étroites étaient ainsi associées à des niveaux d'énergie du noyau composé. On pouvait espérer que la connaissance de la position et de la largeur de ces niveaux permettrait d'interpréter de manière satisfaisante non seulement le comportement des sections efficaces au voisinage des résonances, mais aussi dans les régions intermédiaires, en tenant compte de l'influence des niveaux lointains. Diverses théories cohérentes [9] ont développé rigoureusement cette idée. La plus complète [10], la "théorie de la matrice R" est due essentiellement à E.P. Wigner. Certes, l'existence d'une énergie potentielle hermitique dans l'hamiltonien du système est une des hypothèses de cette théorie, mais elle sert seulement à assurer la validité de trois principes fondamentaux (la conservation de la probabilité, l'invariance par renversement du temps et la causalité). Les paramètres fondamentaux de la théorie (les "largeurs réduites") suffisent pour décrire complètement toute réaction nucléaire où les rayons d'interaction sont finis. La forme du potentiel devient ainsi une quantité inutile. Fondée sur des bases qui sont celles même de la mécanique quantique non relativiste, la théorie de la matrice R peut en principe s'appliquer à un très large domaine d'énergie. Mais dès que

l'énergie dépasse quelques Mev, le nombre des niveaux devient si grand, leur disposition si enchevêtrée que la théorie cesse d'être applicable sous sa forme originelle. En faisant des statistiques sur les largeurs réduites, on peut encore interpréter les sections efficaces observées à faible résolution, en quelque sorte les sections efficaces moyennes. Le modèle est compliqué et on comprend que les physiciens l'aient délaissé pour un modèle plus simple qui n'est autre que le modèle optique [11]. La partie réelle du potentiel réfracte simplement les nucléons incidents, tandis que la partie imaginaire rend compte globalement de la formation d'un "noyau composé", qui peut à son tour se désintégrer dans un très grand nombre de voies, y compris la voie d'entrée. En d'autres termes, ce potentiel d'absorption n'est pas nécessairement associé aux sections efficaces de réaction. On peut encore utiliser le modèle, sans modification, dans le domaine d'énergie où la diffusion élastique est la seule compatible avec les principes de conservation. Cette souplesse lui a permis d'être appliqué avec succès d'énergies de l'ordre du Mev aux abords du domaine relativiste. Grâce à quelques aménagements, tels que l'introduction d'un potentiel spin-orbite, on peut reproduire au mieux la variation avec l'énergie ou avec l'angle des sections efficaces, observées avec une résolution en énergie relativement faible. Bien mieux [12], il a été possible de justifier et de calculer grossièrement le potentiel optique à partir des potentiels d'interaction nucléaires.

Plus récemment enfin, le modèle optique a été utilisé [13], avec toutefois moins de succès, pour interpréter les expériences de diffusion des ions lourds par les noyaux à moyenne énergie (∿ quelques Mev par nucléon).

Qu'est-ce donc qui, pour interpréter les collisions non relativistes, rend la notion de potentiel si commode ? On peut distinguer trois raisons principales :

1) Pour un potentiel donné, les calculateurs électroniques permettent de résoudre exactement le problème de diffusion.

2) Dans la limite des erreurs expérimentales, des formes simples de potentiel, à 2 ou 3 paramètres ajustables, permettent de reproduire la plupart des résultats expérimentaux.

3) Il n'est pas nécessaire pour cela de faire varier beaucoup les paramètres avec l'énergie

Ceci appelle quelques commentaires :

1 - Le potentiel n'a, a priori, aucune raison d'être local et indépendant de l'énergie. Si on le calcule à partir des interactions nucléaires, on trouve une certaine non-localité. Si on cherche à reproduire les résultats expérimentaux à l'aide d'un potentiel local, celui-ci devra dépendre de l'énergie. Heureusement la dépendance est faible : des variations trop rapides feraient du potentiel un outil inutilisable. Cela ne veut pas dire qu'en tenir compte soit superflu. Récemment Perey et Buck [14] ont montré qu'avec des formes raisonnables de non-localité et

de variation en r, un potentiel non local unique permet d'interpréter un ensemble très vaste de résultats expérimentaux avec toute la précision souhaitable.

2 - Les formes de potentiel utilisées justifient des raisonnements ou des approximations qui permettent de prévoir très rapidement certains résultats, ou qui suggèrent de très séduisantes analogies.

L'une des plus fécondes a été l'analogie classique, ou semi-classique. Les raisonnements auxquels elle conduit ont continué dans certains cas à être utilisés alors même que la notion de potentiel était abandonnée. (Diffusion des ions lourds, études à très hautes énergies).

Ainsi la notion de potentiel est-elle encore très riche et très utile. Pour lui donner un sens, il est indispensable de savoir constuire un potentiel à partir des sections efficaces, et il est bon qu'il remplisse les conditions générales que nous avons notées plus haut. Le problème présente donc deux aspects complémentaires :

L'aspect formel - étant donné un ensemble de résultats expérimentaux, calculer le ou les potentiels qui permettent de les retrouver.

L'aspect "physique" - quelles conditions générales doit satisfaire une section efficace correspondant à une "bonne forme" de potentiel ? Est-il possible, à partir d'une section efficace qui remplit ces conditions, d'établir une valeur approchée du potentiel, qui permette éventuellement de choisir parmi les résultats de l'étude formelle ?

Ce problème n'est défini que dans un ensemble donné de résultats expérimentaux. Ainsi, pendant longtemps, les physiciens ont cherché à décrire le potentiel entre 2 particules. Comme ils disposaient de résultats expérimentaux à basse et à moyenne énergie qui ne permettaient de mesurer avec précision guère plus que le déphasage S, ils ont étudié la construction du potentiel à partir de la donnée du déphasage S à toutes les énergies.

C'est là ce qu'on appelle couramment le problème inverse, qui a fait l'objet de très nombreuses publications [15]. Un problème aussi intéressant, et plus utile, par exemple en physique nucléaire, est celui de la construction d'un potentiel à partir de la section efficace différentielle et éventuellement de la polarisation, à une énergie donné ; on peut l'appeler "problème inverse à énergie fixée". Nous nous proposons de l'étudier ici. En effet, et contrairement au précédent, il l'a été extrêmement peu. Pourtant, comme nous l'avons vu plus haut, il se pose très couramment en physique nucléaire. Il est alors "résolu" en prenant à priori une forme simple à 2 ou 3 paramètres, par exemple la forme dite de "Saxon et Woods", et en ajustant les paramètres de façon à reproduire les résultats expérimentaux dans leurs marges d'erreur. Est-il besoin d'indiquer en quoi ce procédé laisse à désirer ?

Il est impossible de savoir s'il n'y a pas une infinité d'autres formes de potentiel résolvant le problème. Par suite

1 - La méthode ne donne aucun guide pour calculer le potentiel, par exemple à partir des interactions nucléaires, ou bien, dans la diffusion nucléon-nucléon, à partir des interactions mésoniques.

2 - Il est impossible de savoir quel est le sens profond de la variation des paramètres avec l'énergie. Ne peut-il exister d'autres formes qui ne varient pas, ou qui varient autrement ?

Ainsi cette méthode est d'un bien faible secours si l'on veut obtenir davantage qu'un procédé d'écriture condensé des résultats expérimentaux. Ses insuffisances nous suggèrent les buts et les conditions d'étude de notre travail :

Buts

1 - Donner une méthode d'étude du problème inverse à énergie fixée qui convienne pour une classe suffisamment large de potentiels

2 - Etudier les relations entre les propriétés des sections efficaces différentielles et celles du potentiel à l'intérieur de cette classe.

Ces buts devront être recherchés de deux manières différentes, qui correspondent aux deux aspects du problème signalés plus haut.

1) Approche formelle

Son but sera d'abord de rechercher la classe la plus générale de potentiels où l'on puisse résoudre le problème inverse. Elle devra préciser leur comportement asymptotique, leurs propriétés analytiques et, d'une manière générale, tous les renseignements qui permettent d'éclairer leur construction à partir d'interactions plus élémentaires. Elle devra en particulier comprendre une étude détaillée du prolongement analytique des fonctions de Jost dans le plan complexe, afin de donner des éléments d'information pour distinguer les potentiels qui reproduisent le même jeu de déphasages.

Par contre, il sera possible dans une première phase de se limiter au cas d'un potentiel réel, et de laisser de côté les complications dues au spin.

2) Etude asymptotique

Cette étude qui correspond peut-être davantage à l'aspect physique du problème, peut être limitée à une classe de potentiels plus restreinte, qui possède ce qu'il est convenu d'admettre généralement comme les propriétés raisonnables des potentiels. On recherchera alors des méthodes

d'approximation valables à énergie suffisamment élevée pour qu'un nombre important de déphasages ne soient pas négligeables. Cette condition est évidemment essentielle si l'on veut espérer obtenir des indications précises sur le potentiel. On demandera à l'étude d'englober les cas physiques réels, donc de tenir compte du spin et en physique nucléaire de l' "absorption",qui traduit la formation possible du noyau composé.

Conditions d'étude

Même l'étude asymptotique devra être rigoureuse, c'est-à-dire que les ordres de grandeur des restes dans les méthodes d'approximation devront être évalués ou majorés. Il est bien clair que ceci est indispensable pour que les résultats puissent être exploités dans le problème inverse. Toutefois les analogies semi-classiques peuvent être utiles dans des domaines où pour l'instant, ils ne sont pas encore entièrement justifiés. Il sera bon d'en tenir compte.

Nous avons cherché à remplir ce programme dans la présente étude. Elle est divisée en deux parties, dont la première est consacrée à l'approche formelle, la seconde à l'approche asymptotique. Chaque partie est présentée par une introduction, qui rappelle les travaux antérieurs et donne le programme de travail. De même, chaque chapitre et, à l'intérieur de chaque chapitre, chaque section, est, en général, présenté par une introduction, sous le titre "Contenu", qui en donne les résultats essentiels. Cette manière de procéder a été rendue indispensable par la lourdeur des développements mathématiques, dont plusieurs ne sont pas classiques. Quelques appendices seront consacrés à de petites études séparées utilisées au cours de la thèse.

Enfin, dans la conclusion, nous ferons le point du travail effectué, et montrerons combien le problème reste encore ouvert.

# PREMIERE PARTIE

## APPROCHE FORMELLE

# INTRODUCTION

Le problème peut être schématisé de la façon suivante :

On donne la section efficace différentielle de diffusion élastique d'une particule sans spin par un centre diffuseur de symétrie sphérique, en fonction de l'angle $\theta$, rapporté à l'habituel système du centre de masse.

On suppose que les conditions de validité de la mécanique quantique non relativiste sont satisfaites, de sorte que l'équation de Schrödinger doit permettre de résoudre le problème si on utilise dans l'hamiltonien une énergie potentielle de symétrie sphérique convenable.

On veut déterminer la variation de cette énergie potentielle avec la distance r de la particule au centre diffuseur.

La résolution de ce problème comprend nécessairement deux étapes :

1) Le but de la première est de déterminer les éléments de l'amplitude de diffusion, ou, ce qui revient au même, les déphasages, à partir des valeurs de la section efficace différentielle à tous les angles.

2) Le but de la seconde est de déterminer le potentiel à partir de l'ensemble des valeurs physiques des déphasages.

Le principe de la solution du premier problème est connu depuis longtemps [1]. Si l'on désigne par $\eta(\theta)$ la phase de l'amplitude de diffusion $f(\theta)$, il résulte de relations bien connues que :

$$f(\theta) = \sqrt{\sigma(\theta)}\ e^{i\eta(\theta)} = (2ik)^{-1} \sum_{\ell} (2\ell + 1) \left[ e^{2i\delta_\ell} - 1 \right] P_\ell (\cos\theta) \qquad (0.1)$$

en sorte que

$$e^{2i\delta_\ell} = 1 + ik \int_0^\pi \sqrt{\sigma(\theta)}\ e^{i\eta(\theta)}\ P_\ell (\cos\theta) \sin\theta\ d\theta \qquad (0.2)$$

où $\sigma(\theta)$ est la section efficace mesurée, k le moment cinétique.

Il suffit donc, pour calculer les déphasages, de disposer d'une autre relation, de façon à déterminer $\eta(\theta)$. Or, si $\vec{k}$, $\vec{k}'$ et $\vec{k}''$ sont trois vecteurs correspondant à la même énergie, et si $f(\vec{k}',\vec{k})$ est l'amplitude de diffusion dans la direction $\vec{k}'$ d'une onde incidente dans la direction $\vec{k}$, il est facile de déduire [1] de l'équation de Schrödinger et de la définition de l'amplitude de diffusion la relation suivante :

$$\sqrt{\sigma(\theta)}\ \sin\eta(\theta) = (4\pi)^{-1}\, k \int \sqrt{\sigma(\theta')\sigma(\theta'')}\ \cos\left[\eta(\theta') - \eta(\theta'')\right]\ d\Omega_{\vec{k}''} \qquad (0.3)$$

où $\theta$ est l'angle entre $\vec{k}$ et $\vec{k}'$, $\theta'$ l'angle entre $\vec{k}$ et $\vec{k}''$, $\theta''$ l'angle entre $\vec{k}'$ et $\vec{k}''$, et l'intégration est faite sur toutes les directions possibles de $\vec{k}''$. Cette équation est une équation intégrale pour la fonction $\eta(\theta)$, dont la résolution est la clé du problème. Elle est évidemment invariante si on remplace $\eta(\theta)$ par $\pi - \eta(\theta)$, ce qui revient à changer de signe la partie réelle de l'amplitude de diffusion, et constitue une ambiguïté irréductible du problème. C'est seulement cette année que le problème de l'unicité de la solution de cette équation intégrale a été étudié . Dans un travail encore à l'état de manuscrit, André Martin* a montré en effet que, pour une forme de fonction $g(\theta)$ donnée, il existe toujours un coefficient $\lambda$ suffisamment petit pour que l'équation (0.3) ait une solution et une seule (à l'ambiguïté signalée près), lorsque $\sigma(\theta)$ est égale à $\lambda\, g(\theta)$. Ceci garantit qu'à haute énergie la première étape de notre problème a une solution et une seule, l'ambiguïté pouvant être levée par ailleurs au cours de la deuxième étape. La solution de l'équation (0.3) est certainement unique dans des conditions beaucoup plus larges, mais qui n'ont pas été étudiées à ce jour. Naturellement, tout ceci suppose que les sections efficaces sont connues exactement. En pratique, les erreurs expérimentales vont faire que seuls les déphasages pour de faibles valeurs de $\ell$ sont connus avec précision. Les suivants sont seulement inférieurs à une certaine quantité. Il peut en résulter des ambiguïtés. C'est sans doute à cause de ces ambiguïtés d'origine expérimentale que le problème a été si peu étudié. En effet, seule la deuxième étape du problème - ou, si l'on procède comme les expérimentateurs, la donnée a priori d'une forme de potentiel à petit nombre de paramètres - permet de les lever.

Nous ne nous occuperons donc plus dans ce rapport de cette première étape, et entendrons désormais par problème inverse à énergie fixée, ou tout simplement problème inverse, le problème de la construction du potentiel à partir des valeurs physiques des déphasages, supposés tous connus avec précision.

---

* Nous tenons à remercier le Professeur André Martin de nous avoir exposé son travail et nous avoir permis d'en faire état.

Ce problème inverse a été lui-même très peu étudié. En 1955, une note [2] de J.A. Wheeler signale que, dans le cadre de la méthode d'approximation J.W.K.B., il est possible de déterminer entièrement le potentiel à partir de l'amplitude de diffusion. Nous reviendrons sur ce travail dans la 2ème partie de notre étude. En 1959, T. Regge montre [3] que si l'on connait une interpolation des déphasages physiques pour des valeurs non entières du moment angulaire, un potentiel unique lui correspond. Mais c'est seulement en 1961 que A. Martin et Gy Targonski cherchent à résoudre [4] le problème inverse en se donnant à l'avance une certaine classe de potentiel. Celle qu'ils choisissent, la classe des superpositions de potentiels de Yukawa, possède un intérêt physique évident. En effet, la théorie des champs conduit, aux ordres de la théorie des perturbations pour lesquels le calcul a pu être fait, à des potentiels de cette classe. Martin et Targonski prouvent que la connaissance de l'amplitude de diffusion détermine entièrement le potentiel de cette classe qui la reproduit. Leur méthode est la suivante : ils prouvent tout d'abord que, dans ce cas, le prolongement analytique de l'amplitude de diffusion dans le plan complexe des angles $\theta$ est unique. La discontinuité à travers la coupure dans ce plan l'est aussi, et il est possible de déterminer le potentiel à partir des valeurs de cette discontinuité. Quelques conditions sont exigées de l'amplitude de diffusion pour rendre le problème soluble.

Si l'intérêt de cette étude est évident, ses limitations le sont aussi :

- les conditions données sur l'amplitude de diffusion sont seulement des conditions nécessaires
- la méthode de construction du potentiel prouve son existence mais est inutilisable pour le construire effectivement.

En 1962, Roger G. Newton [5] donne une méthode de construction du potentiel auxquelles ces critiques ne s'appliquent pas. Cette méthode a été construite en analogie avec la méthode [1] de Gel'fand et Levitan qui conduisit à la solution du problème à moment angulaire fixé (dont nous avons parlé dans l'introduction générale). A partir des déphasages, l'inversion d'un certain nombre de matrices infinies conduit à des coefficients qui définissent simplement une certaine fonction $f(r,r')$, analogue à la fonction $D(r,r')$ de la méthode de Gel'fand et Levitan. Le potentiel peut être déduit de $f(r,r')$ par la résolution d'une équation de Fredholm semblable à l'équation de Gel'fand et Levitan. Certaines des matrices infinies peuvent être inversées par des techniques classiques, mais la plus importante d'entre elles, la matrice M, ne peut pas l'être. Newton montra qu'une matrice inverse existait bien, mais qu'elle n'était sûrement pas unique. En effet, il existe au moins un vecteur $\hat{v}$ solution non triviale de l'équation

$$M\hat{v} = 0 \qquad (0.4)$$

Newton ne put construire une matrice inverse de M. Une autre insuffisance de sa théorie réside dans le manque de renseignements sur la classe de potentiels qu'elle contient.

En 1964, Peter J. Redmond, étonné [6] par les propriétés de la matrice M, l'étudie de façon approfondie, et arrive à montrer que le vecteur $\hat{v}$ est unique (à une constante multiplicative près évidemment). Mais, pas plus que Newton, il n'arrive à construire une matrice inverse de M.

Nous avons ainsi fait le tour des travaux connus au début de notre étude. Remarquant que la méthode de Newton est une méthode de construction effective du potentiel, et pensant que la classe de potentiels qu'elle contient est très vaste, nous avons décidé de développer tout d'abord cette méthode aussi loin que possible. A cet effet, nous avons d'abord construit effectivement une matrice inverse de M, $M^{-1}$, et le vecteur $\hat{v}$ annihilé par M. Nous nous sommes ensuite servi de cet outil mathématique pour étudier le comportement asymptotique des potentiels de Newton en fonction du comportement asymptotique des déphasages qu'ils permettent de retrouver. Nous trouvons en particulier, que, pourvu que les déphasages décroissent plus vite à l'infini que $\ell^{-3+\varepsilon}$, où $\varepsilon$ est arbitrairement petit, un et un seul des potentiels équivalents décroit asymptotiquement plus vite que $r^{-2+\varepsilon}$. Les autres potentiels ont une queue oscillante amortie par un facteur $r^{-3/2}$. Un cas particulier intéressant est celui des potentiels donnant des déphasages tous nuls à énergie donnée. Nous donnons leur comportement asymptotique. Toutes ces questions sont traitées au chapitre I.

Le chapitre II est consacré à une étude approfondie des potentiels construits par la méthode de Newton. Nous montrons que leur produit par r peut être prolongé analytiquement, dans le plan complexe, comme une fonction méromorphe dont les pôles sont d'ordre au moins 2. Nous montrons ensuite que leurs fonctions de Jost peuvent être prolongées analytiquement dans le plan des moments angulaires complexes. Elles sont méromorphes et ont des pôles fixés aux entiers négatifs. Les zéros de $f_2(\nu)$, pour les grandes valeurs du module, se placent sur une courbe du 1er quartier ($\mathrm{Re}\ \nu > 0$, $\mathrm{Im}\ \nu > 0$), qui se trouve être à la frontière d'un domaine décrit par Martin comme ne devant pas contenir de pôle de Regge. Ces zéros sont en nombre infini. Pour $\mathrm{Re}\ \nu < 0$, ils sont contenus dans la bande $|\mathrm{Im}\ \nu| < 1$. Pour $|\nu|$ infini et au voisinage de la direction imaginaire $\mathrm{Arg}\ \nu = \frac{3\pi}{2}$ l'amplitude de diffusion se comporte comme $e^{-i\pi\nu}$. Toutes ces conditions excluent la possibilité d'appliquer le théorème de Carlson et laissent entrevoir que la classe des potentiels de Newton est plus restreinte qu'on pouvait le croire.

Le chapitre III a donc consisté à chercher une méthode plus générale que celle de Newton. Nous construisons une méthode qui permet de résoudre formellement les problèmes de diffusion pour une classe de potentiel très vaste, qui peuvent être prolongés analytiquement dans un voisinage non nul de l'origine, coupé sur l'axe réel négatif. Au sein de cette classe, nous

définissons la sous-classe assez particulière des potentiels de Newton et d'autres sous-classes beaucoup plus générales pour lesquelles le problème inverse est soluble. Nous le résolvons effectivement pour certaines d'entre elles, et montrons que la même indétermination se retrouve dans l'inversion des formules de Born. Cette indétermination a au moins la puissance du dénombrable. Nous terminons le chapitre, et cette lère partie, par une étude rapide des propriétés descriptives de ces potentiels et de leurs fonctions de Jost.

# CHAPITRE I

## ETUDE ASYMPTOTIQUE DES POTENTIELS DE NEWTON

Ce chapitre est consacré à la construction des deux outils mathématiques essentiels de la méthode de Newton et à l'étude des propriétés asymptotiques des potentiels qu'elle permet d'obtenir. Il est divisé en 3 sections :

Dans la première,nous rappelons succinctement la méthode de Newton et donnons quelques études mathématiques préliminaires. Ce rappel est destiné à introduire les notations et les formules utilisées par la suite. Des remarques critiques et constructives sur la méthode elle-même seront effectuées dans les chapitres suivants.

Nous faisons ensuite une revue de certaines propriétés utiles des séries de fonctions de Bessel. La plupart de ces propriétés sont simples. Les démonstrations qui ne sont pas assez courtes sont rejetées en appendice.

Nous construisons dans la section II les deux outils essentiels de la théorie, la matrice $M^{-1}$ et le vecteur $\hat{v}$. La technique d'inversion est donnée pour une classe de matrices qui comprend M. Cette technique n'étant pas classique est étudiée en détail.

Dans la troisième et dernière section, les propriétés asymptotiques des potentiels sont données en fonction des propriétés asymptotiques des déphasages, à condition que celles-ci satisfassent une condition très peu restrictive. Nous étudions en détail le cas des potentiels qui donnent un ensemble de déphasages physiques tous nuls à l'énergie considérée. Nous les désignerons, pour des raisons évidentes, sous le nom de potentiels transparents. L'existence de ces potentiels est due à l'existence de vecteurs $\hat{v}$ annihilés par M, et chacun d'eux correspond à une valeur du paramètre $\alpha$. Nous étudions ensuite l'ensemble des potentiels qui reproduisent un ensemble complet de déphasages, et correspondent à diverses valeurs de $\alpha$. Si les déphasages décroissent* à l'infini plus vite que $\ell^{-(3+\varepsilon)}$, le terme dominant du comportement asymptotique de

---

* Dans tout ce texte, nous entendrons par $\varepsilon$ un nombre positif qui peut être choisi arbitrairement petit.

ces potentiels pour $r \to \infty$ est un terme oscillant amorti par un facteur $r^{-3/2}$, sauf pour l'un d'entre eux, qui décroit plus vite que $r^{-2+\varepsilon'}$. Ce dernier est donc le seul qui puisse, éventuellement, avoir une queue non oscillante. Nous reviendrons sur ce comportement asymptotique dans le chapitre III.

## SECTION I - ETUDES PRELIMINAIRES

### 1.1.1 - Exposé succinct de la méthode de Newton

#### Contenu

A partir d'une fonction f(r,r') définie par un développement en produits de fonctions de Bessel sphériques, Newton construit le potentiel au moyen d'une équation analogue à celle de Gel'fand - Levitan. Il montre ensuite que l'inversion d'un certain nombre de matrices infinies permet de construire les coefficients du développement de f(r,r') à partir des déphasages.

#### Développement

Le développement qui va suivre est formel. Des justifications peuvent en être trouvées dans le chapitre II.

Newton introduit une fonction f(r,r') définie par la série infinie :

$$f(r,r') = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \, u_\ell(r) \, u_\ell(r') \qquad (I.1.1)$$

où les $c_\ell$ sont des coefficients réels, et les fonctions $u_\ell$ sont les fonctions de Bessel sphériques :

$$u_\ell(r) = (\pi/2\, r)^{1/2} \, J_{\ell+1/2}(r) \qquad (I.1.2)$$

La distance radiale r est mesurée en prenant comme unité $\lambda$, longueur d'onde réduite du mouvement relatif, qui est supposée fixée dans tout ce qui suivra. Les fonctions $u_\ell(r)$ satisfont l'équation différentielle :

$$D_o(r) \, u_\ell(r) = \ell(\ell+1) \, u_\ell(r) \qquad (I.1.3)$$

où $D_o(r)$ est un opérateur différentiel défini de la manière suivante :

$$D_o(r) \equiv r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 1\right) \qquad (I.1.4)$$

A partir de f(r,r'), on construit la fonction K(r,r') solution de l'équation de Fredholm :

$$K(r,r') = f(r,r') - \int_o^r dr_1 \, r_1^{-2} \, K(r, r_1) \, f(r_1,r') \, dr_1 \qquad (I.1.5)$$

Cette équation sera étudiée en détail au cours du chapitre II. On peut prouver que $K(r,r')$ satisfait le système différentiel :

$$D(r)\ K(r,r') = D_o(r')\ K(r,r')$$
$$K(r,o) = K(o,r') = 0 \qquad (I.1.6)$$

où $D(r)$ est défini par les deux relations suivantes :

$$D(r) \equiv D_o(r) - r^2\ V(r) \qquad (I.1.7)$$

$$V(r) = -\ 2r^{-1} \left(\frac{d}{dr}\right) \left[ r^{-1}\ K(r,r) \right] \qquad (I.1.8)$$

Newton se sert ensuite de $K(r,r')$ pour définir la fonction :

$$\Phi_\ell(r) = u_\ell(r) - \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ K(r,\rho)\ u_\ell(\rho) \qquad (I.1.9)$$

En appliquant $D(r)$ à (I.1.9), quelques calculs laborieux mais élémentaires (cf. Appendice A VI) montrent que $\Phi_\ell(r)$ satisfait l'équation :

$$D(r)\ \Phi_\ell(r) = \ell(\ell+1)\ \Phi_\ell(r) \qquad (I.1.10)$$

Ainsi, si $V(r)$ est le potentiel, $\Phi_\ell(r)$ est une solution de l'équation de Schrödinger pour la valeur $\ell$ du moment orbital. Il résulte d'ailleurs de (I.1.6) que $\Phi_\ell(r)$ est la solution <u>régulière</u> de cette équation, c'est-à-dire :

$$\Phi_\ell(0) = 0 \qquad (I.1.11)$$

A partir de (1), (5) et (9), Newton établit ensuite le développement suivant de $K(r,r')$ :

$$K(r,r') = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell\ \Phi_\ell(r)\ u_\ell(r') \qquad (I.1.12)$$

L'insertion de cette relation dans (9), conduit au système suivant de relations algébriques couplées :

$$\Phi_\ell(r) = u_\ell(r) - \sum_{\ell'} L_\ell^{\ell'}(r)\ c_{\ell'}\Phi_{\ell'}(r) \qquad (I.1.13)$$

où

$$L_{\ell}^{\ell'}(r) = \int_{o}^{r} u_{\ell}(\rho)\, u_{\ell'}(\rho)\, \rho^{-2}\, d\rho \qquad \text{(I.1.14)}$$

Ce système est équivalent à l'équation intégrale (5). Quand $r \to \infty$, il est possible de remplacer ces fonctions par leur comportement asymptotique :

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\ell}(r) &\sim A_{\ell} \sin (r - \ell\,\pi/2 + \delta_{\ell}) \\ u_{\ell}(r) &\sim \sin (r - \ell\,\pi/2) \\ L_{\ell}^{\ell'}(r) &\sim L_{\ell}^{\ell'}(\infty) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.1.15)}$$

On obtient ainsi à partir de (13) les formules fondamentales :

$$\sin \delta_{\ell} = \sum_{\ell'} M_{\ell}^{\ell'}\, b_{\ell'} \cos (\delta_{\ell'} - \delta_{\ell}) \qquad \text{(I.1.16)}$$

$$A_{\ell} = \cos \delta_{\ell} - \frac{\pi}{2}\, b_{\ell} \Big/ (2\ell + 1) - \sum_{\ell'} M_{\ell}^{\ell'}\, b_{\ell'} \sin (\delta_{\ell'} - \delta_{\ell}) \qquad \text{(I.1.17)}$$

où $M_{\ell}^{\ell'}$ et $b_{\ell}$ sont définis de la manière suivante :

$$M_{\ell}^{\ell'} = \begin{cases} i^{\ell-\ell'+1}\, L_{\ell}^{\ell'}(\infty) & \text{pour } \ell \neq \ell' \\ 0 \text{ pour } \ell = \ell' \end{cases} \qquad \text{(I.1.18)}$$

$$b_{\ell} = c_{\ell}\, A_{\ell} \qquad \text{(I.1.19)}$$

On peut tirer de (16) une équation plus simple :

$$\operatorname{tg} \delta_{\ell} = \sum_{\ell'} M_{\ell}^{\ell'}\, a_{\ell'} (1 + \operatorname{tg} \delta_{\ell} \operatorname{tg} \delta_{\ell'}) \qquad \text{(I.1.20)}$$

où

$$a_{\ell} = b_{\ell} \cos \delta_{\ell} \qquad \text{(I.1.21)}$$

L'inversion de la matrice M permet de calculer les $a_\ell$, et donc les $b_\ell$. En reportant le résultat dans (17) on obtient les $A_\ell$, et (I.1.19) fournit enfin les coefficients $c_\ell$ qui définissent entièrement le problème.

## 1.1.2 - Sommabilité et majorations (*) des séries de fonctions de Bessel

### Contenu

Nous passons ici en revue un certain nombre de propriétés de séries de fonctions de Bessel ou de produits de fonctions de Bessel qui sont d'un usage constant dans notre problème. Seules les démonstrations les plus simples sont indiquées dans le texte, les autres sont reportées en appendice.

### 1.1.2.1 - Convergence uniforme des séries de fonctions de Bessel

Il s'agit de séries de fonctions $u_q(x)$ définies par (1.1.2), mais où q n'est pas nécessairement entier. Les séries dont nous aurons besoin sont de l'une des deux formes suivantes :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \; u_{n+\beta}(x) \qquad \text{(I.1.22)}$$

$$h(r,r') = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \; u_n(r) \; u_n(r') \qquad \text{(I.1.23)}$$

Nous supposerons par la suite que $|p_n|$ et $|q_n|$ sont bornés supérieurement indépendamment de n. Il résulte de la borne (AI5) donnée en appendice que S(x) converge uniformément pour n'importe quelle valeur finie, réelle ou complexe, de x, et définit ainsi une fonction entière de x. De la même façon, la série h définit une fonction entière de r (resp. r') pour n'importe quelle valeur finie de r' (resp. r).

### 1.1.2.2 - Comportement asymptotique et bornes des séries h(r,r')

Suivant le comportement asymptotique de leurs coefficients, qui va conditionner leur propre comportement asymptotique, nous distinguerons 4 classes de séries h(r,r') (+) :

---

* Dans l'ensemble de ce texte, nous entendrons par "borne" une borne supérieure pour la valeur absolue, et par "bornée" une fonction "bornée" en valeur absolue.

\+ Dans tout ce texte, nous utilisons C pour désigner une constante quelconque, dont la valeur peut être différente chaque fois que le symbole est utilisé, même dans une formule donnée. Le symbole O(f) signifie < C f.

Classe 0 $\qquad q_{2n+1} = 0 \qquad q_{2n} \sim 1 + 0\,(n^{-5/3\,-\varepsilon})$

$$h_0(r,r') \sim 1/2(rr')^{1/2}\left[J_o(r-r') + H_o(r+r') + 0(r^{-1/2}r'^{-1/2})\right] \quad \text{(I.1.24)}$$

où $H$ est la fonction de Struve [6].

Classe $\overline{0}$ $\qquad q_{2n} = 0 \qquad q_{2n+1} \sim 1 + 0\,(n^{-5/3\,-\varepsilon})$

$$h_{\overline{0}}(r,r') \sim 1/2(rr')^{1/2}\left[J_o(r-r') - H_o(r+r') + 0(r^{-1/2}r'^{-1/2})\right] \quad \text{(I.1.25)}$$

Classe 1 $\qquad q_n \sim n^{-1} + 0\,(n^{-5/3\,-\varepsilon})$

$$|h_1(r,r')| \lesssim C(\text{Log } r)^{1/2}\,(\text{Log } r')^{1/2} + C \qquad \text{pour } r \text{ et } r' > 1 \quad \text{(I.1.26)}$$

Classe 2

$$h_2(r,r') \sim C_1 \cos(r-r') + C_2 \cos(r+r') + 0\,(r^{-\varepsilon/2})$$

$$\text{pour } r \to \infty,\ r' > r \quad \text{(I.1.27)}$$

Le comportement asymptotique des séries de la classe 2 résulte immédiatement de celui des fonctions de Bessel (cf. AI1). Le terme dominant dans les restes vient des valeurs de n entre $\varepsilon_o^{1/2}$ r et r, ainsi que des restes en $\varepsilon_o^2$ pour n compris entre 0 et $\varepsilon^{1/2}$ x (cf AI1 et AI2). Les restes dans 1.1.2.7 peuvent être alors évalués en posant $\varepsilon_o = r^{-\varepsilon/4}$.

Les séries des classes 0, $\overline{0}$ et 1 ne sont définies qu'à une série de la classe 2 près. On peut par suite déduire leur comportement asymptotique et leurs majorants de ceux des séries typiques $T_0$, $T_{\overline{0}}$ et $T_1$ étudiées dans l'appendice A II.

Les séries de la classe 2 peuvent être majorées indépendamment de r et de r' : nous dirons qu'elles appartiennent aussi à la classe B. Ainsi $2 \subset B$. Pour des séries dont les coefficients décroissent plus lentement que ceux de la classe 2, mais sans présenter la régularité requise pour les classes 0 et 1, on peut encore trouver des majorations en se servant des relations de récurrence des fonctions de Bessel [7] :

$$2\,J_\nu(z) = z\,\nu^{-1}\left[J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z)\right] \quad \text{(I.1.28)}$$

C'est ainsi par exemple que la borne suivante :

$$\sum_{o}^{\infty} a_n \; J_n(z) \, J_n(z') \; < \; C \, z \qquad \text{(I.1.29)}$$

est valable quel que soit z', pourvu que $(n^{2/3+\varepsilon} a_n)$ soit borné quand $n \to \infty$

1.1.2.3 - Sommabilité des séries doubles

Nous rencontrerons des doubles séries de fonctions de Bessel :

$$\sum_n a_n \; u_n(x) \; \sum_p b_n^p \; u_p(x') \qquad \text{(I.1.30)}$$

et nous aurons besoin de savoir si elles ont un sens quels que soient x et x' (réels, positifs). Il suffira pour cela d'étudier la sommabilité des doubles séries :

$$\sum_n |a_n| \; n^{1/3} \sum_p |b_n^p| \; p^{1/3} \qquad \text{(I.1.31)}$$

Ce sont des séries à termes positifs qui majorent partout les séries (I.1.30) et pour lesquelles la réciproque (faible) du théorème de Fubini s'applique.

Il suffit donc de vérifier que les séries des modules de (I.1.30) peuvent être sommées dans un ordre quelconque. Au cours de ce travail, un certain type de séries interviendra fréquemment, qui peuvent être étudiées sur l'exemple général :

$$|S| = \sum_q \frac{|a_q|}{|(r+\alpha)^2 - (q+\gamma)^2|} \qquad \text{(I.1.32)}$$

où r est entier, $\alpha \neq \gamma$, $\alpha < 1$, $\gamma < 1$, et $|a_q| \sim q^{-\beta}$ quand $q \to \infty$

Nous montrons dans l'appendice (AI2) que

$$|S| \; < \; C_1 \, r^{-1-\beta+\varepsilon} + C_2 \, r^{-2} \qquad \text{(I.1.33)}$$

1.1.2.4 - Sommabilité de diverses intégrales

Nous étudierons deux espèces de problèmes de convergence où interviennent des intégrales d séries de fonctions de Bessel.

1) Etudions d'abord l'intégrale suivante :

$$I = \int_o^\infty u_{\lambda+\beta}(\rho)\ S(\rho)\ \rho^{-2}\ d\rho \qquad (I.1.34)$$

où $S(\rho)$ est définie comme dans (I.1.22), $\lambda \geq 0, \beta > -1$.

Nous allons prouver qu'il est possible d'intégrer terme à terme la série $S(\rho)$ et que I peut ainsi être calculé sous la forme :

$$I = \sum_o^\infty q_n \int_o^\infty u_{\lambda+\beta}(\rho)\ u_{n+\beta}(\rho)\ \rho^{-2}\ d\rho \qquad (I.1.35)$$

pourvu que $|q_n| < n^{2/3-\varepsilon}$ et que I converge quand on calcule l'intégrale sous la forme (I.1.34)

Démonstration - Nous séparerons l'intervalle d'intégration en 2 parties $(0,r)$ et $(r,\infty)$. Sur la première, la série est absolument convergente et il est possible d'intégrer terme à terme, en sorte que le seul problème est de montrer que la contribution de l'intervalle $(r,\infty)$ tend vers zéro quand $r \to \infty$, que l'intégrale soit évaluée sous la forme (I.1.34) ou sous la forme (I.1.35). Or cela est certainement vrai dans le premier cas puisque, par hypothèse (I.1.34) converge. Dans le second, nous pouvons écrire :

$$I_r = \sum_n q_n \int_r^\infty u_{\lambda+\beta}(\rho)\ u_{n+\beta}(\rho)\ \rho^{-2}\ d\rho$$

$$= \sum_n q_n \frac{\sin(\lambda-n)\pi/2 \ - \left[ u_n(r)\ u'_\lambda(r) - u_\lambda(r)\ u'_n(r) \right]}{(\lambda+\beta)(\lambda+\beta+1) - (n+\beta)(n+\beta+1)} \qquad (I.1.36)$$

Les séries convergent et, pour les grandes valeurs de r, tendent vers la valeur obtenue en remplaçant chaque terme par son comportement asymptotique. En effet, elles appartiennent à la classe 2 décrite plus haut. On voit donc que $I_r$ s'annule quand $r \to \infty$, ce qu'il fallait démontrer.

2) Nous allons maintenant étudier l'intégrabilité terme à terme d'un produit de 2 séries des classes étudiées plus haut :

$$\int_o^\infty h_\alpha(X_1,X)\ \ h_\beta(X,X_2)\ \ X^{-2}\ \ dX \qquad (I.1.37)$$

Si les deux séries h sont de la classe 2, le problème est trivial. On peut d'ailleurs obtenir dans ce cas une borne pour l'intégrale en prenant $\theta = \tan^{-1} X$ comme nouvelle variable et

$$\bar{u}_p(\theta) = u_p(X)\ X^{-1}\left[dX \,/\, d\theta\right]^{1/2} \qquad \text{(I.1.38)}$$

comme nouvelles fonctions. L'intégrale se réduit ainsi à une intégrale finie de deux fonctions bornées, ou de deux séries absolument convergentes. Si les deux séries sont plus générales, il devient très difficile d'obtenir des bornes indépendantes de $X_1$ et $X_2$. Par contre, il est facile de montrer que pour tout couple de valeurs finies de $X_1$ et $X_2$, l'intégration terme à terme est possible et conduit à la même valeur que sous la forme (1.37), pourvu que cette intégrale soit convergente et que les coefficients dans les séries soient bornés par une puissance de leur indice. La démonstration est la même que précédemment. La contribution de l'intervalle $(r,\infty)$ conduit aux séries suivantes :

$$\sum q_n^{(\alpha)}\ u_n(X_1) \sum q_p^{(\beta)}\ u_p(X_2)\ \frac{\sin(p-n)\pi/2 - \left[u_n(r)\,u'_p(r) - u_p(r)\,u'_n(r)\right]}{p(p+1) - n(n+1)} \qquad \text{(I.1.39)}$$

Ces séries peuvent être bornées grâce aux majorations AI5 des fonctions de Bessel, et le résultat tend vers zéro si $r \gg X_1$ et $X_2$, par exemple $r > \mathrm{Max}\,(X_1^2\ ,\ X_2^2)$ pour $X_1$ et $X_2$ grand.

1.1.2.5 - Majorations de certaines intégrales

Nous utiliserons pour les intégrales (I.1.37) la notation condensée :

$$h_\alpha\begin{pmatrix} X_1 \\ X \end{pmatrix} \cdot\ h_\beta\begin{pmatrix} X \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.1.40)}$$

En intégrant terme à terme et en majorant les séries on obtient facilement les résultats suivants :

$$h_i\begin{pmatrix} X_1 \\ X \end{pmatrix} \cdot\ h_2\begin{pmatrix} X \\ X_2 \end{pmatrix} \in B \qquad \forall\ i = 0, \bar{0}, 1, 2 \qquad \text{(I.1.41)}$$

$$h_1\begin{pmatrix} X_1 \\ X \end{pmatrix} \cdot\ h_1\begin{pmatrix} X \\ X_2 \end{pmatrix} \in B \qquad \text{(I.1.42)}$$

$$h_0\begin{pmatrix} X_1 \\ X \end{pmatrix} \cdot\ h_1\begin{pmatrix} X \\ X_2 \end{pmatrix} \in B \ ; \quad h_{\bar{0}}\begin{pmatrix} X_1 \\ X \end{pmatrix} \cdot\ h_1\begin{pmatrix} X \\ X_2 \end{pmatrix} \in B \qquad \text{(I.1.43)}$$

$$h_{\bar{0}}\begin{pmatrix} X_1 \\ X \end{pmatrix} \cdot\ h_{\bar{0}}\begin{pmatrix} X \\ X_2 \end{pmatrix} = h_1\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \ ; \quad h_0\begin{pmatrix} X_1 \\ X \end{pmatrix} \cdot h_0\begin{pmatrix} X \\ X_2 \end{pmatrix} = h_1\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(I.1.44)}$$

L'inégalité de Schwarz [7] nous permet d'obtenir une borne supérieure pour l'intégrale double dissymétrique :

$$|h_0\begin{pmatrix} X_1 \\ X \end{pmatrix} \cdot h_{\bar{0}}\begin{pmatrix} X \\ X_2 \end{pmatrix}| < \sqrt{\left[h_0\begin{pmatrix} X_1 \\ X \end{pmatrix} \cdot h_0\begin{pmatrix} X \\ X_1 \end{pmatrix}\right]\left[h_{\bar{0}}\begin{pmatrix} X_2 \\ X \end{pmatrix} \cdot h_{\bar{0}}\begin{pmatrix} X \\ X_2 \end{pmatrix}\right]} \qquad \text{(I.1.45)}$$

$$< C\left[\text{Log } X_1\right]^{1/2}\left[\text{Log } X_2\right]^{1/2}$$

Il est facile de déduire de cette table que toute intégrale triple où les séries sont prises dans les classes 0, 1 ou 2, est bornée indépendamment de $X_1$ et $X_2$.

1.1.2.6 - Bornes pour quelques autres séries ou intégrales

Rappelons la formule bien connue

$$2\,J'_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) \qquad \text{(I.1.46)}$$

Elle permet d'obtenir des bornes supérieures pour les dérivées des séries de la classe 2, et montrer en particulier que :

$$r\frac{d}{dr}\,r^{-1}\,h_2(r,r) \sim C \sin 2r \qquad r \to \infty \qquad \text{(I.1.47)}$$

Les formules suivantes peuvent être obtenues à partir des résultats de l'appendice II (A II(5)) :

$$\frac{\partial}{\partial r}\,T_0(r,r') \sim -\frac{\partial}{\partial r'}\,T_{\bar{0}}(r,r') \qquad \text{(I.1.48a)}$$

$$\sim \frac{1}{2}(rr')^{1/2}\left[-J_1(|r-r'|)\,\text{sgn}(r-r') + O(rr')^{-1/4} + O(r^{-1}) + O(r'^{-1})\right]$$

$$\frac{d}{dr}\,r^{-1}\,T_0(r,r) = J_0(2r) \;;\; \frac{d}{dr}\,r^{-1}\,T_{\bar{0}}(r,r) = J_2(2r) \qquad \text{(I.1.48b)}$$

$$\frac{d}{dr}\,r^{-1}\,T_1(r,r) < C\,r^{-2}\,\text{Log } r \qquad \text{(I.1.49)}$$

Il est facile d'en déduire des bornes pour les dérivées d'intégrales contenant 2 séries h, en particulier :

$$r \frac{d}{dr} r^{-1} \left[ h_i\left(\frac{r}{x}\right) \cdot h_2\left(\frac{x}{r}\right) \right] \in B \qquad \text{(I.1.50)}$$

$$r \frac{d}{dr} r^{-1} \left[ h_i\left(\frac{r}{x}\right) \cdot h_1\left(\frac{x}{r}\right) \right] \in B \qquad \text{(I.1.51)}$$

Nous calculerons aussi exactement l'exemple typique d'intégrale $(0,\overline{0})$ :

$$T_{0\overline{0}}(r,r') = \int_0^\infty T_0(r,r_1)\ T_{\overline{0}}(r_1,r')\ r_1^{-2}\ dr_1 \qquad \text{(I.1.52)}$$

Avec les expressions exactes de $T_0$ et $T_{\overline{0}}$ (Appendice II) et en calculant une intégrale de Weber-Schafheitlein [8], nous obtenons les résultats suivants :

$$T_{\overline{0},0}(r,r') = rr' \int_0^{\pi/2} J_1(r \sin\alpha)\, d\alpha \int_0^{\alpha} J_0(r' \sin\beta) \sin\beta\ d\beta \qquad \text{(I.1.53)}$$

et

$$r \frac{d}{dr} r^{-1}\ T_{\overline{0},0}(r,r) = r \frac{d}{dr} r^{-1}\ T_{0,\overline{0}}(r,r) \qquad \text{(I.1.54)}$$

$$= \frac{r^2}{2} \left[ \int_0^{\pi/2} J_0(r \sin\alpha) \sin\alpha\, d\alpha \right]^2 = 1/2 \sin^2 r \qquad \text{(I.1.55)}$$

## SECTION II - CONSTRUCTION DES OUTILS MATHEMATIQUES DE LA THEORIE

### Contenu

Nous construisons une matrice $M^{-1}$ inverse de la matrice M et le vecteur $\hat{v}$ annihilé par la matrice M.

### Développement

Nous nous proposons de construire une matrice inverse à la fois à droite et à gauche de la matrice M, dont les éléments sont égaux à :

$$M_{\ell}^{\ell'} = \begin{cases} \left[ (\ell' + 1/2)^2 - (\ell + 1/2)^2 \right]^{-1} & \text{pour } \ell' - \ell \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } \ell' - \ell \text{ pair} \end{cases} \qquad (I.2.1)$$

Comme cela ne demande aucun travail supplémentaire, nous construirons un inverse de la matrice beaucoup plus générale :

$$M^{(\alpha)\ell'}_{\ell} = \begin{cases} \left[ (\ell' + \alpha)^2 - (\ell + \alpha)^2 \right]^{-1} & \text{pour } \ell' - \ell \text{ impair} \\ 0 & \text{pour } \ell' - \ell \text{ pair} \end{cases} \qquad (I.2.2)$$

où $\alpha > -1/2$

Rappelons la formule bien connue [9] :

$$\int_0^\infty J_\mu(\rho)\ J_\nu(\rho)\ \rho^{-1}\ d\rho = \frac{\sin \pi/2(\nu-\mu)}{\pi/2\ (\nu^2 - \mu^2)} \qquad (I.2.3)$$

Elle nous permet d'écrire $M^{(\alpha)\ell'}_{\ell}$ de la manière suivante

$$M^{(\alpha)\ell'}_{\ell} = \pi/2 \sin \pi/2\ (\ell'-\ell) \int_0^\infty J_{\ell+\alpha}(\rho)\ J_{\ell'+\alpha}(\rho)\ \rho^{-1}\ d\rho$$

$$(\alpha > -1/2)$$

Partant de la définition des matrices inverses, nous allons maintenant développer notre méthode en donnant tout d'abord une suite formelle de relations. Les preuves de convergence seront données ensuite.

Le produit scalaire [11] de ces fonctions par des fonctions de Bessel est :

$$\int_0^\infty J_{\lambda+\alpha}(\rho)\, S_1(\rho)\, \rho^{-1}\, d\rho = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(\alpha+1/2+\lambda/2)}{2\Gamma(1-\lambda/2)\,\Gamma(1+\alpha+\lambda/2)\,\Gamma(1/2+\lambda/2)} \qquad (I.2.12)$$

$$\int_0^\infty J_{\lambda+\alpha}(\rho)\, S_0(\rho)\, \rho^{-1}\, d\rho = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(\alpha+\lambda/2)}{2\Gamma(1/2-\lambda/2)\,\Gamma(\alpha+\lambda/2+1/2)\,\Gamma(1+\lambda/2)} \qquad (I.2.13)$$

La formule (I.2.12) montre que $S_1(\rho)$ est orthogonale à toute fonction $J_{2r+\alpha}$ excepté $J_\alpha$, tandis que (I.2.13) montre que $S_0(\rho)$ est orthogonale à toutes les fonctions $J_{2r+1+\alpha}$. A partir de $S_0$ et $S_1$, nous construirons les fonctions suivantes :

$$\bar{S}_0^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^0 \frac{1}{(2n+\alpha)^2 - (2p+1+\alpha)^2} J_{2n+\alpha}(\rho) \qquad (I.2.14)$$

$$\bar{S}_1^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^1 \frac{1}{(2n+1+\alpha)^2 - (2p+\alpha)^2} J_{2n+1+\alpha}(\rho) \qquad (I.2.15)$$

Calculons le produit scalaire d'une quelconque de ces fonctions $\bar{S}$ par une fonction $J_{\lambda+\alpha}(\rho)$ :

$$A(\bar{S}) = \int_0^\infty J_{\lambda+\alpha}(\rho)\, \rho^{-1}\, \bar{S}(\rho)\, d\rho \qquad (I.2.16)$$

L'équation différentielle de Bessel et deux intégrations par parties nous permettent d'obtenir le résultat suivant :

$$(\lambda+\alpha)^2 A(\bar{S}) = \left[ \bar{S}(\rho) \frac{d}{d\rho} J_{\lambda+\alpha}(\rho) - J_{\lambda+\alpha}(\rho) \frac{d}{d\rho} \bar{S}(\rho) \right]^\infty + \int_0^\infty J_{\lambda+\alpha}(\rho) \left[ \frac{d}{d\rho} \rho \frac{d}{d\rho} \bar{S}(\rho) \right] d\rho \qquad (I.2.17)$$

Les résultats du paragraphe (1.1.2.2) montrent que les termes entre crochets sont bornés quand $\rho \to \infty$, et que l'on peut utiliser le comportement asymptotique [12] des fonctions contenues dans les séries pour les calculer. Nous trouvons ainsi que les crochets $B_0^{(p)}$ et $B_1^{(p)}$ associés respectivement aux fonctions $\bar{S}_0^{(p)}$ et $\bar{S}_1^{(p)}$ sont égaux à :

$$B_o^{(p)}(\rho) = \sin\lambda\,\pi/2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^0 \frac{(-1)^n}{(2n+\alpha)^2 - (2p+1+\alpha)^2} + O(\rho^{-1/3}) \qquad (I.2.18)$$

$$B_1^{(p)}(\rho) = \sin(\lambda-1)\pi/2 \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^1 \frac{(-1)^n}{(2n+1+\alpha)^2 - (2p+\alpha)^2} + O(\rho^{-1/3}) \qquad (I.2.19)$$

$(\rho \to \infty)$

En utilisant les relations (I.2.8) (I.2.9) et des formules bien connues, nous pouvons écrire (I.2.18) et (I.2.19) sous les formes équivalentes :

$$B_0^{(p)}(\infty) = C \sin \lambda \pi/2 \int_0^\infty J_{2p+1+\alpha}(\rho)\, S_0(\rho)\, \rho^{-1}\, d\rho \qquad (I.2.20)$$

$$B_1^{(p)}(\infty) = C \sin (\lambda-1)\pi/2 \int_0^\infty J_{2p+\alpha}(\rho)\, S_1(\rho)\, \rho^{-1}\, d\rho \qquad (I.2.21)$$

Il résulte de (12) et de (13) que $B_0^{(p)}(\infty)$ est égal à 0 quel que soit p, tandis que $B_1^{(p)}(\infty)$ est égal à zéro pour tout p différent de zéro. Ainsi le crochet dans (I.2.17) est nul dans ces circonstances. Si l'on utilise dans le 2ème membre l'équation différentielle de Bessel, on en déduit les relations suivantes :

$$\left[(\lambda+\alpha)^2 - (2p+1+\alpha)^2\right] A(\overline{S}_0^{(p)}) = \int_0^\infty J_{\lambda+\alpha}(\rho)\, S_0(\rho)\, \rho^{-1}\, d\rho \qquad (I.2.22)$$

$$\left[(\lambda+\alpha)^2 - (2p+\alpha)^2\right] A(\overline{S}_1^{(p)}) = \int_0^\infty J_{\lambda+\alpha}(\rho)\, S_1(\rho)\, \rho^{-1}\, d\rho \qquad (I.2.23)$$

En utilisant (I.2.12) et (I.2.13), il est facile d'en tirer les deux formules :

$$\int_0^\infty J_{2r+1+\alpha}(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \left[\overline{S}_0^{(p)}(\rho) - C(p)\, S_0(\rho)\right] = \frac{(-1)^{p+1}}{8} \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+1/2)}{(2p+1+\alpha)\,\Gamma(p+3/2)\,\Gamma(p+1)} \delta_r^p \qquad (I.2.24)$$

où la constante arbitraire C(p) peut dépendre de p ; et :

$$\int_0^\infty J_{2r+\alpha}(\rho) \frac{d\rho}{\rho} \left[\overline{S}_1^{(p)}(\rho) - \frac{S_1(\rho)}{\alpha^2-(2p+\alpha)^2}\right] = \frac{(-1)^p}{8} \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(p)\,\Gamma(p+1/2)}{(2p+\alpha)\,\Gamma(p+1/2)\,\Gamma(p+\alpha+1)} \delta_r^p \qquad (p \neq 0) \qquad (I.2.25)$$

En comparant (I.2.24) et (I.2.7) et avec l'aide de (I.2.4), nous obtenons ainsi une valeur possible de $\gamma_{2n}^{2p+1}$ :

$$\gamma_{2n}^{2p+1} = \frac{16(2p+1+\alpha)}{\pi^2} \frac{\Gamma(p+1+\alpha)}{\Gamma(p+1/2+\alpha)} \frac{\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(p+1)} \left[\frac{1}{(2n+\alpha)^2 - (2p+1+\alpha)^2} - C(p)\right] \frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+\alpha+1/2)\Gamma(n+1)}(2n+\alpha) \qquad (I.2.26)$$

De la même façon, nous pouvons tirer de (I.2.6) (I.2.24) et (I.2.3) la valeur de $\gamma_{2n+1}^{2p}$ pour $p \neq 0$ :

$$\gamma_{2n+1}^{2p} = \frac{16(2p+\alpha)}{\pi^2} \frac{\Gamma(p+\alpha)\ \Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+\alpha+1/2)\Gamma(p+1)} \left[ \frac{1}{(2n+1+\alpha)^2 - (2p+\alpha)^2} \right] \frac{\Gamma(n+1+\alpha)\Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+1/2+\alpha)\ \Gamma(n+1)} (2n+1+\alpha)$$

(I.2.27)

Puisque $\left[M^{(\alpha)}\right]$ est une matrice antisymétrique, si $\Gamma$ est elle-même antisymétrique, elle est simultanément un inverse à droite et un inverse à gauche de $\left[M^{(\alpha)}\right]$. Si on compare (I.2.26) et (I.2.27) on voit que cette condition est remplie si C(p) est nulle, et on en déduit les derniers coefficients inconnus, $\gamma_{2n+1}^{0}$.

Nous pouvons écrire le résultat final de la façon suivante, valable quels que soient n et p

$$\gamma_{2n}^{2p+1}(\alpha) = \mu_{2n}(\alpha) \frac{1}{(2n+\alpha)^2-(2p+1+\alpha)^2} \mu_{2p+1}(\alpha) \qquad (I.2.28)$$

$$\gamma_{2n+1}^{2p}(\alpha) = \mu_{2n+1}(\alpha) \frac{1}{(2n+1+\alpha)^2-(2p+\alpha)^2} \mu_{2p}(\alpha) \qquad (I.2.29)$$

où

$$\mu_{2n}(\alpha) = \frac{4}{\pi} \frac{\Gamma(n+\alpha)\ \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+\alpha+1/2)\ \Gamma(n+1)} (2n+\alpha) \qquad (I.2.30)$$

$$\mu_{2n+1}(\alpha) = \frac{4}{\pi} \frac{\Gamma(n+1+\alpha)\ \Gamma(n+3/2)}{\Gamma(n+\alpha+1/2)\ \Gamma(n+1)} (2n+1+\alpha) \qquad (I.2.31)$$

Pour $\alpha = 0$, il est facile de retrouver un résultat dû à Newton, et qui lui a servi pour démontrer l'existence de $M^{-1}$. Les résultats pour $\alpha = 1/2$ sont écrits dans la section 3.

Problèmes de convergence

Au cours de notre calcul, nous avons rencontré deux types de problèmes de convergence. Le premier est celui de la convergence d'intégrales définies contenant des fonctions de Bessel. La condition $\alpha > -1/2$ est suffisante pour l'assurer. Le second concerne la possibilité de changer l'ordre de la sommation et de l'intégration sur les séries $S_0(\rho)$, $S_1(\rho)$, $S_0^{(p)}(\rho)$, $S_1^{(p)}(\rho)$, en vue d'intégrer ces séries terme à terme. Or, nous pouvons tirer de (I.2.10)(I.2.11) (I.2.28) et (I.2.29), en utilisant la formule de Stirling [13], l'équivalence asymptotique suivante quand $n \to \infty$, p restant fixé :

$$\gamma_{2n+1}^{2p} \sim C\ \alpha_n^1 + O\ (n^{-2}) \sim C + O\ (n^{-2})$$

$$\gamma_{2n}^{2p+1} \sim C\ \alpha_n^o + O\ (n^{-2}) \sim C + O\ (n^{-2})$$

Si l'on se reporte à l'analyse du paragraphe (1.1.2.4), on voit que le problème est résolu si les intégrales $S_0(\rho)$ et $S_1(\rho)$ sont elles-mêmes convergentes. Ceci est vrai pour $\alpha > -1/2$.

Vecteur annihilé par M

Il est évident d'après (I.2.9) (I.2.11) et (I.2.13) que le vecteur $\hat{v}$, de composantes :

$$\begin{cases} v_{2n} = 2(-1)^n\ \alpha_n^o \Big/ \Gamma(1/2) \\ v_{2n+1} = 0 \end{cases} \qquad \text{(I.2.35)}$$

est annihilé par $M^{(\alpha)}$. Dans le cas de M ($= M^{(1/2)}$), les composantes sont :

$$v_{2n} = \frac{2(2n+1/2)}{\pi}\ \frac{\Gamma(n+1/2)\ \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(n+1)\ \Gamma(n+1)} \qquad \text{(I.2.36)}$$

Ce vecteur est unique, d'après l'analyse de Redmond et la méthode de construction de Newton de $\hat{v}_{(\alpha=1/2)}$ à partir de $\hat{v}_{(\alpha=0)}$.

## SECTION III - CONSTRUCTION ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES POTENTIELS

### Contenu

Nous étudions le comportement asymptotique en r des potentiels, compte tenu du comportement asymptotique en $\ell$ des déphasages. Pour cela, nous nous intéresserons d'abord à un cas particulier, celui des potentiels transparents, qui produisent un ensemble de déphasages physiques tous nuls à l'énergie considérée. La section efficace de diffusion élastique est donc nulle à cette énergie, c'est-à-dire qu'il n'y a aucun moyen de savoir si la particule a été ou non diffusée. Il est remarquable de constater que les potentiels obtenus ont, après tout, une allure acceptable : finis à l'origine, ils ont une queue oscillante modulée par un facteur $r^{-3/2}$. Cet exemple nous donne aussi la voie à suivre pour étudier le comportement asymptotique des potentiels dans le cas général. Une première étape doit donner le comportement asymptotique des coefficients $c_\ell$. Des manipulations ensuite de l'équation de Fredholm fondamentale du problème - nous l'appellerons désormais l'équation F - conduiront au comportement asymptotique des potentiels. Ce programme est réalisé dans les paragraphes 2 et 3. Notre méthode requiert une condition restrictive sur le comportement asymptotique des déphasages, mais cette condition est très faible. On trouve une infinité de potentiels, qui correspondent aux diverses valeurs de $\alpha$, constante multiplicative arbitraire du vecteur annulé par la matrice M. Le terme dominant de leur comportement asymptotique est celui des potentiels transparents, sauf pour l'un d'entre eux, pour lequel ce terme s'annule. Le comportement asymptotique de ce potentiel est alors inférieur à C Logr $r^{-2}$. Il est bien évident que seul ce potentiel peut, éventuellement, ne pas osciller pour les grandes valeurs de r.

Nous avons subdivisé cette section en 3 paragraphes :

### 3.1 - Les potentiels transparents

En employant une notation matricielle, nous pouvons réécrire la solution de I.1.20 sous la la forme :

$$\hat{a} = \left[1 + [R]\right]^{-1} \left[\alpha\hat{v} + \left[M^{-1}\right]\left[tg\Delta\right]\hat{e}\right] \qquad (I.3.1)$$

où $\hat{a}$ et $\hat{e}$ sont respectivement les vecteurs colonnes $a_\ell$ et 1, tandis que :

$$\left[tg\,\Delta\right]_\ell^{\ell'} = (\tan\delta_\ell)\,\delta_\ell^{\ell'} \qquad (I.3.2)$$

$$\left[R\right] = \left[M^{-1}\right]\left[tg\,\Delta\right]\left[M\right]\left[tg\,\Delta\right] \qquad (I.3.3)$$

$\hat{v}$ est défini par (I.2.35) et $\alpha$ est un paramètre arbitraire.

Si tous les déphasages sont nuls, l'équation (I.3.1) se réduit à :

$$\hat{a}_o = \alpha \hat{v} \tag{I.3.4}$$

A partir de (I.1.21), (I.1.19) et (I.1.17), nous pouvons déduire les valeurs de $c_\ell^{(o)}$ qui définissent, grâce à la relation (I.1.1) une fonction $f_o(r,r')$ :

$$\begin{cases} c_{2n+1}^{(o)} = 0 \\ c_{2n}^{(o)} = \alpha\, v_{2n} \left[ 1 - \frac{\pi}{2} \alpha \frac{v_{2n}}{(4n+1)} \right]^{-1} \end{cases} \tag{I.3.5}$$

Soit $g_o(r,r')$ la solution de l'équation intégrale :

$$g_o(r,r') = f_o(r,r') - \int_o^\infty f_o(r,r_1)\, g_o(r_1,r')\, r_1^{-2}\, dr_1 \tag{I.3.6}$$

A partir de (I.3.5), (I.1.2) et (I.2.3), on peut montrer que le développement suivant satisfait (I.3.6) et peut donc être identifié à $g_o(r,r')$ :

$$g_o(r,r') = \alpha \sum_o^\infty v_{2n}\, u_{2n}(r)\, u_{2n}(r') \tag{I.3.7}$$

Je dis que $\frac{d}{dr} r^{-1} K_o(r,r)$ et $\frac{d}{dr} r^{-1} g_o(r,r)$ ont le même comportement asymptotique quand $r \to \infty$

Démonstration

Quoique nous utilisions des équations de Fredholm où l'intervalle d'intégration est infini, ceci n'introduit pas de difficulté tant que toutes les intégrales écrites convergent. Il serait d'ailleurs facile de rendre fini l'intervalle d'intégration en faisant un changement de variables et un changement de fonctions tel que celui que nous ferons plus bas (I.3.3). Le noyau obtenu appartient alors à $L_2$, de sorte que la méthode des séries de Neuman, par exemple, s'applique sans difficulté. Bien entendu, nous ferons d'abord un exposé formel, et donnerons ensuite les preuves de convergence.

Rappelons nous l'équation F (I.1.15), et remplaçons dans le membre de droite $f_o(r,r')$ par l'expression qu'on en peut déduire de (I.3.6) :

$$\int_o^r r_1^{-2}\ dr_1\ K_o(r,r_1)\ f_o(r_1,r') = \int_o^r r_1^{-2}\ dr_1\ K_o(r,r_1)\ g_o(r_1,r')$$

$$+ \int_o^r K_o(r,r_1)\ r_1^{-2}\ dr_1 \int_o^\infty f_o(r_1,r_2)\ g_o(r_2,r')\ r_2^{-2}\ dr_2$$

(I.3.8)

En changeant l'ordre des intégrations et en utilisant de nouveau l'équation F, nous voyons que le dernier terme de I.3.8 est égal à :

$$- \int_o^\infty r_2^{-2}\ dr_2\ g_o(r_2,r')\ K_o(r,r_2) + \int_o^\infty r_2^{-2}\ dr_2\ g_o(r_2,r')\ f_o(r,r_2) \qquad (I.3.9)$$

Le dernier terme de (I.3.9) peut être remplacé par l'expression obtenue à partir de (I.3.5). Si l'on reporte le résultat dans (I.3.8) et ensuite (I.3.8) dans F(I.1.15), on obtient l'équation suivante :

$$K_o(r,r') = g_o(r,r') + \int_r^\infty r_1^{-2}\ dr_1\ K_o(r,r_1)\ g_o(r_1,r') \qquad (I.3.10)$$

Pour une valeur donnée de r, cette équation est une équation de Fredholm. Introduisons aussi l'équation de Fredholm de son résolvant :

$$S_r(\rho,r') = g_o(\rho,r') + \int_r^\infty r_1^{-2}\ dr_1\ S_r(\rho,r_1)\ g_o(r_1,r') \qquad (I.3.11)$$

Il est clair que $S_r(\rho,r')$ est une fonction symétrique de $\rho$ et de r' et que :

$$K_o(r,r') = S_r(r,r') = S_r(r',r) \qquad (I.3.12)$$

Pour obtenir V(r), nous avons besoin de connaître $K_o(r,r')$ et ses deux dérivées partielles aux points r = r'. On peut les obtenir de la manière suivante : nous déduisons de (I.3.10) les équations suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial r'}\ K_o(r,r') = \frac{\partial}{\partial r'}\ g_o(r,r') + \int_r^\infty r_1^{-2}\ dr_1\ K_o(r,r_1)\ \frac{\partial}{\partial r'}\ g_o(r_1,r') \qquad (I.3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\ K_o(r,r') = \frac{\partial}{\partial r}\ g_o(r,r') + r^{-2}\ K_o(r,r)\ g_o(r,r')$$

$$+ \int_r^\infty r_1^{-2}\ dr_1 \left[\frac{\partial}{\partial r}\ K_o(r,r_1)\right] g_o(r_1,r') \qquad (I.3.14)$$

Avec une notation plus condensée évidente, ceci peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[K_o(r,r')\right] = S_r(r') + \int_r^\infty r_1^{-2}\, dr_1\, \frac{\partial}{\partial r}\, K_o(r,r_1)\, g_o(r_1,r') \qquad (I.3.15)$$

Les propriétés connues [14] des équations de Fredholm nous permettent d'écrire la solution de (I.3.15) en utilisant (I.3.11) :

$$\frac{\partial}{\partial r}\, K_o(r,r') = s_r(r') + \int_r^\infty r_1^{-2}\, dr_1\, s_r(r_1)\, S_r(r_1,r') \qquad (I.3.16)$$

Tout en conservant présentes à l'esprit les propriétés de symétrie de la fonction $g_o$, nous déduisons de (I.3.13) (I.3.16) (I.3.12) et (I.3.10) le résultat suivant :

$$\frac{d}{d r}\, K_o(r,r) = \frac{d}{d r}\, g_o(r,r) + r^{-2}\left[K_o(r,r)\right]^2 + 2\int_r^\infty r_1^{-2}\, dr_1\, K_o(r,r_1)\, \frac{\partial}{\partial r}\, g_o(r_1,r) \qquad (I.3.17)$$

Ainsi le problème se réduit à l'évaluation de $K_o(r,r')$. Il résulte de la relation (I.24) que pour les grandes valeurs de r et de r', nous pouvons majorer $|g_o(r,r')|$ de la façon suivante :

$$|g_o(r,r')| < C(rr')^{1/2}\, (1+|r-r'|)^{-1/2} \qquad (I.3.18)$$

Cette borne nous permet d'en obtenir d'autres pour la norme du noyau de (I.3.10) et des quantités analogues :

$$\left[\int_r^\infty g_o^2\,(x,y)\, x^{-2}\, dx\right]^{1/2} < C\left[\text{Log } y\right]^{1/2} \qquad (I.3.19)$$

$$N^2 = \int_r^\infty y^{-2}\, dy \int_r^\infty x^{-2}\, g_o^2\,(x,y)\, dx < Cr^{-1}\, \text{Log } r \qquad (I.3.20)$$

Les séries de Neuman pour (I.3.10) convergent donc si r est assez grand, et l'étude bien connue de ces séries nous permet d'écrire le comportement asymptotique de $K_o(r,r')$ :

$$|K_o(r,r') - g_o(r,r')| < C\, (\text{Log } r)^{1/2} (\text{Log } r')^{1/2} \qquad (I.3.21)$$

Par ailleurs, nous savons d'après les formules (I.1.48a) que pour r et r' suffisamment grands :

$$\left|\frac{\partial}{\partial r}\, g_o(r,r')\right| < C(rr')^{1/2}\, (1 + |r-r'|)^{-1/2} \qquad (I.3.22)$$

Un théorème bien connu [15] nous permet de déduire des bornes (I.3.18), (I.3.21) (I.3.22) et de la continuité de ces fonctions d'une part la convergence de toutes les intégrales écrites et d'autre part la possibilité de dériver sous le signe somme. Par ailleurs, il est assez facile de voir (cf. chapitre II) que $g_o(r,r')$ est la seule solution de son équation intégrale. Comme les séries de Neuman définissent $K_o$ à partir de $g_o$ sans ambiguïté, $K_o$ est donc la seule solution de 1.5 pour $r \to \infty$

Il ne nous reste plus, pour évaluer le potentiel, que déduire de (I.1.48a) la relation suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} g_o(r,r') + \frac{\partial}{\partial r'} g_o(r,r') = O(r^{1/4} r'^{1/4}) \qquad (I.3.23)$$

Si nous substituons les résultats (I.3.23) et (I.3.21) dans l'intégrale de (I.3.17), nous trouvons après une intégration par parties et une évaluation de reste :

$$\frac{d}{d r} K_o(r,r) = \frac{d}{d r} g_o(r,r) + O(r^{-1/2} \text{ Log } r) \qquad (I.3.24)$$

De (I.3.1) et (I.3.24) résulte immédiatement le comportement asymptotique de V(r) :

$$V(r) = -2r^{-1} \frac{d}{d r} r^{-1} g_o(r,r) + O(r^{-5/2} \text{ Log } r) \qquad (I.3.25)$$

ou, si l'on se reporte à (I.1.48b) :

$$\boxed{V(r) \sim -2 \alpha \pi^{-1/2} r^{-3/2} \cos (2r - \pi/4)} \qquad (I.3.26)$$

Cette formule donne donc le comportement asymptotique des potentiels transparents. Il n'est pas difficile de déduire de F que rV(r) est sûrement fini à l'origine. Les propriétés analytiques de ces potentiels au voisinage de l'origine seront étudiés dans le chapitre II.

## 3.2 - Propriétés asymptotiques des coefficients dans le cas général

### Hypothèse fondamentale

Nous supposerons pour tout ce qui va suivre que les déphasages tendent vers zéro à l'infini plus vite que $\ell^{-3-\varepsilon}$. Cette hypothèse est très faible. De nombreux auteurs ont prouvé qu'elle est certainement vérifiée pour des potentiels holomorphes dans le 1/2 plan droit et tendant vers zéro plus vite que $r^{-4}$ quand $r \to \infty$. Dans des cas plus particuliers, tels que les superpositions de

potentiels de Yukawa ou les potentiels bornés par une exponentielle décroissante, les déphasages tendent vers zéro exponentiellement quand $\ell \to \infty$. Néanmoins cette hypothèse est suffisante pour nous permettre d'obtenir le comportement asymptotique des coefficients $a_\ell$.

Nous devons pour cela résoudre (I.3.1) en remplaçant les éléments $\gamma_\ell^{\ell'}$ de $\left[M^{-1}\right]$ par l'expression que nous avons calculée dans la section, prise pour $\alpha = 1/2$ (cf. I.2.28,29,30,31). Nous écrirons ces éléments de la manière suivante :

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{2n}^{2p+1} &= \bar{\mu}_{2n}\ \bar{\mu}_{2p+1}\ (2p+1)\ (2p+2)\left[2n\ (2n+1)\ -\ (2p+1)\ (2p+2)\right]^{-1} \\ \gamma_{2n+1}^{2p} &= \bar{\mu}_{2n+1}\ \bar{\mu}_{2p} + \rho_{2n+1}^{2p} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.3.27)}$$

où

$$\left.\begin{aligned} \rho_{2n+1}^{2p} &= \bar{\mu}_{2n+1}\ \bar{\mu}_{2p}\ 2p(2p+1)\left[(2n+1)(2n+2) - 2p\ (2p+1)\right]^{-1} \\ \bar{\mu}_{2n} &= 2\pi^{-1}\ (2n+1/2)\ \Gamma(n+1/2)\ \ \Gamma(n+1/2)\left[n!\ n!\right]^{-1} \\ \bar{\mu}_{2n+1} &= 2\pi^{-1}\ (2n+3/2)\ \Gamma(n+1/2)\ \Gamma(n+3/2)\left[n!(n+1)!\right]^{-1} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(I.3.28)}$$

Il convient de remarquer que $\bar{\mu}_q$ est défini de façon différente suivant la parité de q. On voit immédiatement que, lorsque $n \to \infty$

$$\bar{\mu}_{2n} \sim \bar{\mu}_{2n+1} \sim 4\pi^{-1} + O(n^{-2}) \qquad \text{(I.3.29)}$$

Nous introduirons le vecteur $\hat{w}$ défini par la relation :

$$\hat{w} = \alpha\hat{v} + \left[M^{-1}\right]\left[tg\Delta\right]\hat{e} \qquad \text{(I.3.30)}$$

Ses composantes sont donc données par les relations suivantes :

$$w_{2n} = \alpha\ v_{2n} + \sum_p \gamma_{2n}^{2p+1}\ tg\ \delta_{2p+1} \qquad \text{(I.3.31)}$$

$$w_{2n+1} = \beta_o\ \bar{\mu}_{2n+1} + \sum_p \rho_{2n+1}^{2p}\ tg\ \ \delta_{2p} \qquad \text{(I.3.32)}$$

où

$$\beta_o = \sum_p \bar{\mu}_{2p}\ tg\ \delta_{2p} \qquad \text{(I.3.33)}$$

Il résulte de (I.3.27), (I.3.28), (I.3.29) et une remarque faite au paragraphe (1.1.2.4), que $w_{2n}$ et $w_{2n+1}$ ont le comportement asymptotique suivant quand $n \to \infty$ et si notre hypothèse fondamentale est vérifiée :

$$\begin{cases} w_{2n} \sim 4\,\pi^{-1}\,\alpha + O(n^{-2}) \\ w_{2n+1} \sim 4\,\pi^{-1}\,\beta_o + O(n^{-2}) \end{cases} \qquad \text{(I.3.34)}$$

Pour relier le comportement asymptotique des $a_\ell$ et celui des $w_\ell$, il nous faut maintenant résoudre le système d'équations suivant :

$$a_{2r} = w_{2r} - \sum_p R_{2r}^{2p}\; a_{2p} \qquad \text{(I.3.35)}$$

$$a_{2r+1} = w_{2r+1} - \sum_p R_{2r+1}^{2p+1}\; a_{2p+1} \qquad \text{(I.3.36)}$$

Résolution de (I.3.35)

Par suite de (I.3.2) et (I.2.1), $R_{2r}^{2p}$ est égal à

$$R_{2r}^{2p} = -\sum_q \gamma_{2r}^{2q+1}\; \operatorname{tg}\delta_{2q+1}\; (-1)^q \int_o^{\pi/2} \bar{u}_{2q+1}(\theta)\; (-1)^p\; \bar{u}_{2p}(\theta)\; \operatorname{tg}\delta_{2p}\; d\theta \qquad \text{(I.3.37)}$$

où les fonctions $\bar{u}_\nu(\theta)$ sont définies comme au paragraphe (I.2.4).

En substituant cette expression dans (I.3.35), en multipliant les deux membres de (I.3.35) par $(-1)^r \operatorname{tg}\delta_{2r}\; \bar{u}_{2r}(\theta)$ et en sommant sur r, nous obtenons l'équation intégrale suivante :

$$\alpha_o(\theta) = \omega_o(\theta) + \int_o^{\pi/2} \gamma_o(\theta,\theta')\; \alpha_o(\theta')\; d\theta' \qquad \text{(I.3.38)}$$

où nous avons utilisé les fonctions suivantes :

$$\alpha_o(\theta) = \sum_r a_{2r}\; \operatorname{tg}\delta_{2r}\; (-1)^r\; \bar{u}_{2r}(\theta) \qquad \text{(I.3.39)}$$

$$\omega_o(\theta) = \sum_r w_{2r}\; \operatorname{tg}\delta_{2r}\; (-1)^r\; \bar{u}_{2r}(\theta) \qquad \text{(I.3.40)}$$

$$\gamma_o(\theta,\theta') = \sum_r \operatorname{tg}\delta_{2r}\; \bar{u}_{2r}(\theta)\; (-1)^r \sum_q \gamma_{2r}^{2q+1}\; \operatorname{tg}\delta_{2q+1}\; (-1)^q\; \bar{u}_{2q+1}(\theta) \qquad \text{(I.3.41)}$$

La convergence de toutes ces séries simples ou doubles est montrée par des techniques que

nous avons données au paragraphe (I.2.3). On peut voir en particulier que $\gamma_o(\theta,\theta')$ est bornée pour toute valeur de $\theta$ et $\theta'$ entre 0 et $\pi/2$. L'équation de Fredholm (I.3.38) a par suite une solution en général, et cette solution est unique, sauf peut être pour des ensembles exceptionnels de déphasages pour lesquels 1 est une valeur propre de l'équation(I.3.38). Nous exclurons ces cas exceptionnels et ne les étudierons pas davantage, supposant que l'ensemble de déphasages physiques étudié n'en fait pas partie. Nous pouvons en être sûr, par exemple, quand tous les déphasages sont si petits que la norme de $\gamma_o(\theta,\theta')$ est plus petite que 1.

Ecrivons dès lors la solution de (I.3.38) sous forme [14] d'un rapport de déterminants de Fredholm :

$$\alpha_o(\theta) = \omega_o(\theta) + \mathcal{D}^{-1} \int_o^{\pi/2} \mathcal{D}(\theta,\theta')\, \omega_o(\theta')\, d\theta' \qquad (I.3.42)$$

où

$$\mathcal{D} = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m!} \int_o^{\pi/2} \cdots \int_o^{\pi/2} K\begin{pmatrix}\theta_1 \cdots \theta_m \\ \theta_1 \cdots \theta_m\end{pmatrix} d\theta_1 \ldots d\theta_m \qquad (I.3.43)$$

$$\mathcal{D}(\theta,\theta') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-)^m}{m!} \int_o^{\pi/2} \cdots \int_o^{\pi/2} K\begin{pmatrix}\theta\ \theta_1 \ldots \theta_m \\ \theta' \theta_1 \ldots \theta_m\end{pmatrix} d\theta_1 \ldots d\theta_m \qquad (I.3.44)$$

Nous rappelons les expressions bien connues des déterminants de Fredholm en fonction du noyau de l'équation :

$$K\begin{pmatrix}x_1 \cdots x_m \\ y_1 \cdots y_m\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_o(x_1,y_1) & \gamma_o(x_1,y_2) \cdots & \gamma_o(x_1,y_m) \\ \gamma_o(x_2,y_1) & \cdots\cdots & \\ \vdots & & \\ \gamma_o(x_m,y_1) & & \gamma_o(x_m,y_m) \end{bmatrix} \qquad (I.3.45)$$

Tout déterminant de 3.44 peut être développé suivant les éléments de la 1ère ligne, la seule où se trouve la variable $\theta$. On peut à leur tour développer les éléments en fonctions $\bar{u}_{2r}(\theta)$, de sorte que l'on développe ainsi le membre de droite de (I.3.42) suivant les fonctions $\bar{u}_{2r}(\theta)$. En identifiant* les coefficients de $\bar{u}_{2r}(\theta)$ dans les 2 membres de (I.3.42), on obtient la valeur de $a_{2r}$ :

$$a_{2r} = w_{2r} + \mathcal{D}^{-1} \mathcal{D}_r(\omega_o) \qquad (I.3.46)$$

---

* Remarquons que les fonctions $\bar{u}_{2r}(\theta)$ sont orthogonales.

où

$$\mathcal{D}_r(\omega_o) = \sum_{m=o}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int \cdots \int \begin{bmatrix} \int \gamma_o^r(\theta')\, \omega_o(\theta')\, d\theta', & \gamma_o^r(\theta_1) \cdots & \gamma_o^r(\theta_m) \\ \int \gamma_o(\theta_1,\theta')\omega_o(\theta')\, d\theta', & \gamma_o(\theta_1,\theta_1) \cdots & \gamma_o(\theta_1,\theta_m) \\ \vdots & & \\ \int \gamma_o(\theta_m,\theta')\, \omega_o(\theta')\, d\theta', & \gamma_o(\theta_m,\theta_1) \cdots & \gamma_o(\theta_m,\theta_m) \end{bmatrix} d\theta_1 \cdots d\theta_m$$

(I.3.47)

et

$$\gamma_o^r(\theta') = \sum_q \gamma_{2r}^{2q+1} \quad \mathrm{tg}\, \delta_{2q+1}\, (-1)^q\, \bar{u}_{2q+1}(\theta') \qquad \text{(I.3.48)}$$

Tous les éléments du déterminant (I.3.47) sont bornés. Il résulte de notre étude (1.2.3) que, si notre hypothèse fondamentale est satisfaite, $|\gamma_o^r(\theta)|$ est borné quelque soit $\theta$ par $C\, r^{-5/3-\varepsilon}$. La même majoration est valable pour $\left|\int_\rho^{\pi/2} \gamma_o^r(\theta')\, \omega_o(\theta')\, d\theta'\right|$, puisque $\omega_o(\theta')$ est bornée. Il résulte du théorème d'Hadamard [14] et de la relation (I.3.47) que

$$|\mathcal{D}_r(\omega_o)| \leq C\, r^{-5/3-\varepsilon} \sum_m (m!)^{-1}\, C^m (m+1)^{\frac{m+1}{2}} \qquad \text{(I.3.49)}$$

La série de droite est convergente. Pourvu donc que les déphasages ne forment pas un de ces ensembles exceptionnels qui annulent $\mathcal{D}$, nous obtenons ainsi le comportement asymptotique des $a_\ell$ :

$$a_{2r} = w_{2r} + O(r^{-5/3-\varepsilon}) = 4\, \pi^{-1}\, \alpha + O(r^{-5/3-\varepsilon}) \qquad \text{(I.3.50)}$$

Résolution de 1.3.36

Nous déduisons de (I.3.2) et (I.3.27) la formule suivante :

$$R_{2r+1}^{2p+1} = \bar{R}_{2r+1}^{2p+1} + \bar{u}_{2r+1}\, \sigma_{2p+1} \qquad \text{(I.3.51)}$$

où

$$\bar{R}_{2r+1}^{2p+1} = \sum_q \rho_{2r+1}^{2q}\, \mathrm{tg}\, \delta_{2q}\, M_{2q}^{2p+1}\, \mathrm{tg}\, \delta_{2p+1} \qquad \text{(I.3.52)}$$

et

$$\sigma_{2p+1} = \sum_{q} \bar{\mu}_{2q} \; tg \; \delta_{2q} \; M_{2q}^{2p+1} \; tg \; \delta_{2p+1} \qquad (I.3.53)$$

Nous introduirons aussi les notations suivantes :

$$\beta_1 = \sum_{p} a_{2p+1} \; \sigma_{2p+1} \qquad (I.3.54)$$

$$t_{2p+1} = w_{2p+1} - \beta_1 \; \bar{\mu}_{2p+1} \qquad (I.3.55)$$

En reportant (I.3.51) dans (I.3.36), nous obtenons l'équation suivante :

$$a_{2r+1} = t_{2r+1} - \sum_{p} \bar{R}_{2r+1}^{2p+1} \; a_{2p+1} \qquad (I.3.56)$$

Supposons maintenant que nous connaissions la solution de cette équation, et écrivons la sous la forme suivante :

$$a_{2r+1} = \sum_{p} U_{2r+1}^{2p+1} \; t_{2p+1} \qquad (I.3.57)$$

Si l'on remplace $t_{2p+1}$ par son expression (I.3.55) dans (I.3.57), et reportons l'expression de $a_{2r+1}$ ainsi obtenue dans (I.3.54), nous obtenons :

$$\beta_1 = \frac{\sum_{r} \sigma_{2r+1} \sum_{p} U_{2r+1}^{2p+1} \; w_{2p+1}}{1 + \sum_{r} \sigma_{2r+1} \sum_{p} U_{2r+1}^{2p+1} \; \bar{\mu}_{2p+1}} \qquad (I.3.58)$$

En substituant $\beta_1$ dans (I.3.55) et (I.3.55) dans (I.3.57) on peut obtenir la valeur de $a_{2r+1}$ Le problème se réduit donc à la résolution de l'équation I.3.56.Or celle-ci peut se faire exactement par la méthode que nous avons utilisée pour (I.3.35). Définissons donc les fonctions suivantes :

$$\tau_1(\theta) = \sum_{p=o}^{\infty} t_{2p+1} \; tg \; \delta_{2p+1} \; (-1)^p \; \bar{u}_{2p+1} \; (\theta) \qquad (I.3.59)$$

$$\gamma_1(\theta,\theta') = - \sum_{r=o}^{\infty} tg \; \delta_{2r+1} \; \bar{u}_{2r+1}(\theta) \; (-1)^r \sum_{q} o_{2r+1}^{2q} \; tg \; \delta_{2q} \; (-1)^q \; \bar{u}_{2q} \; (\theta') \qquad (I.3.60)$$

$$\gamma_1^r(\theta') = -\sum_q \rho_{2r+1}^{2q} \operatorname{tg} \delta_{2q} (-1)^q \bar{u}_{2q}(\theta') \qquad \text{(I.3.61)}$$

On trouve que $a_{2r+1}$ est exprimé en fonction de $\tau_1(\theta)$ par la même formule que (3.46) avec quelques substitutions :

$$\begin{cases} w_{2r} \rightarrow t_{2r+1} & \omega_o(\theta) \rightarrow \tau_1(\theta) \\ \gamma_o(\theta,\theta') \rightarrow \gamma_1(\theta,\theta') & \gamma_o^{(r)} \rightarrow \gamma_1^{(r)} \end{cases} \qquad \text{(I.3.62)}$$

Les quantités telles que $\sum_p U_{2r+1}^{2p+1} w_{2p+1}$ ou $\sum_p U_{2r+1}^{2p+1} \bar{\mu}_{2p+1}$ se calculent facilement en remplaçant $t_{2p+1}$ par $w_{2p+1}$ ou $\bar{\mu}_{2p+1}$ dans $\tau_1(\theta)$. En procédant comme plus haut, on obtient le comportement asymptotique des coefficients $a_{2r+1}$ :

$$a_{2r+1} = t_{2r+1} + O(r^{-5/3-\varepsilon}) = 4\pi^{-1}\beta + O(r^{-5/3-\varepsilon}) \qquad \text{(I.3.63)}$$

où

$$\beta = \beta_o - \beta_1 \qquad \text{(I.3.64)}$$

et où on a tenu compte des relations (I.3.55), (I.3.34) et (I.3.29).

$\beta$ est en général différent de zéro. Il est facile de voir, par exemple, que si tous les déphasages impairs sont nuls, $\beta_1$ est nul, par suite de (I.3.53) et (I.3.54) tandis que $\beta_o$ est différent de zéro, par suite de (I.3.33).

Il peut être intéressant de remarquer que l'analyse ci-dessus permet d'obtenir le comportement asymptotique des $a_\ell$, même si des conditions plus faibles encore sont satisfaites par les déphasages :

si

$$\operatorname{tg} \delta_{2p} \sim \operatorname{tg} \delta_{2p+1} \sim O(p^{-4/3-\gamma-\varepsilon}) \qquad \text{(I.3.65)}$$

où

$$0 \leq \gamma \leq 2$$

les formules suivantes sont valables :

$$\begin{cases} a_{2r} = \alpha\, v_{2r} + O(r^{-\gamma}) & \text{(I.3.66)} \\ a_{2r+1} = \beta\, \bar{\mu}_{2r+1} + O(r^{-\gamma}) & \text{(I.3.67)} \end{cases}$$

Si les déphasages décroissent plus vite que $C\ell^{-10/3}$, les restes sont d'ordre $r^{-2}$. Les séries de Bessel construites avec les termes dominants de (I.3.66) et (I.3.67) comme coefficients sont les séries $T_0$ et $T_{\frac{}{0}}$ étudiées dans l'appendice AII.

Le cas le plus simple pour le calcul pratique des coefficients $a_\ell$ est celui où les déphasages sont petits. Les normes des opérateurs $\gamma_0$ et $\gamma_1$ sont :

$$N_0^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \gamma_0^2 (\theta,\theta')\, d\theta\, d\theta' = \frac{\pi^2}{4} \sum_r \frac{tg^2\, \delta_{2r}}{4r+1} \sum_q \frac{\left[\gamma_{2r}^{2q+1}\ tg\ \delta_{2q+1}\right]^2}{4q+3} \qquad (I.3.68)$$

$$N_1^2 = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \gamma_1^2(\theta,\theta')\, d\theta\, d\theta' = \frac{\pi^2}{4} \sum_r \frac{tg^2\, \delta_{2r+1}}{4r+3} \sum_q \frac{\left[\rho_{2r+1}^{2q}\ tg\ \delta_{2q}\right]^2}{4q+1} \qquad (I.3.69)$$

Si <u>tous</u> les déphasages sont suffisamment petits, $N_o^2$ et $N_1^2$ sont inférieurs à 1. Ceci exige, en particulier, que $\left|\frac{\pi}{4}\ tg\ \delta_o\ tg\ \delta_1\right| < 1$. Les séries de Neuman convergent dans ces conditions et donnent la solution de (I.3.42) et son analogue en $\gamma_1$. L'approximation au 1er ordre de (I.3.35) et (I.3.36) est particulièrement simple :

$$\hat{a} = \hat{w} \qquad (I.3.70)$$

Nous tenons à remarquer enfin que notre méthode et nos démonstrations supposent que toutes les valeurs $tg\ \delta\ell$ sont finies. Toutefois, la prise en compte d'un nombre fini de valeurs infinies n'introduit que des difficultés secondaires.

## 3.3 - Comportement asymptotique des potentiels

Nous sommes maintenant en mesure de déduire des résultats trouvés le comportement asymptotique des potentiels.

Il résulte des relations (I.1.17) (I.1.19) et (I.1.21) la relation suivante, qui permet de calculer les coefficients $c_\ell$ à partir des coefficients a :

$$c_\ell = d_\ell \left(1 - \frac{\pi}{2} \frac{d_\ell}{2\ell+1}\right) \qquad (I.3.71)$$

où $$d_\ell = a_\ell \left[\cos^2 \delta_\ell\right]^{-1} \left[1 - \sum_{\ell'} M_\ell^{\ell'}\ a_{\ell'}\ (tg\delta_{\ell'} - tg\delta_\ell)\right]^{-1} \qquad (I.3.72)$$

Le comportement asymptotique des $d_\ell$ est celui des $a_\ell$, par suite de l'étude (1.2.3) :

$$d_\ell \sim a_\ell \sim 4\pi^{-1} \left[1 + O(\ell^{-5/3-\epsilon})\right] \qquad (I.3.73)$$

Nous définissons ensuite une fonction g(r,r') qui est déduite de f(r,r') de la même manière que $g_o(r,r')$ de $f_o(r,r')$, soit, avec les notations condensées du paragraphe (1.2.5)

$$g\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} r \\ r_1 \end{pmatrix} \cdot g\begin{pmatrix} r_1 \\ r' \end{pmatrix} \qquad (I.3.74)$$

Pour étudier cette équation, nous décomposerons son noyau en 2 parties :

$$f\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = f_o\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} + f_2\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} \qquad (I.3.75)$$

où

$$f_o\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = (\alpha+\beta) \sum_n v_{2n} \left[1 - \frac{\pi}{2} (\alpha+\beta)\, v_{2n}/(4n+1)\right]^{-1} u_{2n}(r)\, u_{2n}(r') \qquad (I.3.76)$$

L'équation qui correspond au noyau $f_o$ est semblable à l'équation (I.3.6), et sa solution est $g_o$, excepté une modification triviale ($\alpha \to \alpha+\beta$). Une méthode classique, décrite par exemple dans le livre de Tricomi [16], nous permet de transformer l'équation (I.3.74) en la suivante :

$$g\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} + S_1\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} \cdot g\begin{pmatrix} r_1 \\ r' \end{pmatrix} = \bar{g}_o\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} + S_1\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} \qquad (I.3.77)$$

où

$$S_1\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = f_2\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} - \bar{g}_o\begin{pmatrix} r \\ r_1 \end{pmatrix} \cdot f_2\begin{pmatrix} r_1 \\ r' \end{pmatrix} \qquad (I.3.78)$$

et

$$\bar{g}_o\begin{pmatrix} r \\ r_1 \end{pmatrix} = (\alpha+\beta)\, T_o\begin{pmatrix} r \\ r_1 \end{pmatrix} \qquad (I.3.79)$$

Soit $g_1$ la différence entre g et $\bar{g}_o$. L'équation (I.3.71) peut aussi bien s'écrire :

$$g_1\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} + S_1\begin{pmatrix} r \\ r_1 \end{pmatrix} \cdot g_1\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} = S_1\begin{pmatrix} r \\ r' \end{pmatrix} - S_1\begin{pmatrix} r \\ r_1 \end{pmatrix} \cdot g_o\begin{pmatrix} r_1 \\ r' \end{pmatrix} \qquad (I.3.80)$$

Il résulte des formules (I.1.24) et (I.1.25), ainsi que (I.3.50) et (I.3.63) que la fonction $f_2(r,r')$ peut être majorée par $C(rr')^{1/4}$, et, d'après l'étude faite au paragraphe (1.2.5), $S_1(r,r')$ est susceptible de la même majoration. Nous allons maintenant utiliser de nouvelles variables et des nouvelles fonctions, afin de rendre fini l'intervalle de sommation dans notre équation intégrale :

$$r = (\mathrm{tg}\,\theta)^2 \qquad r' = (\mathrm{tg}\,\theta')^2 \qquad (I.3.81a)$$

$$(rr')^{-1}\ (dr\ dr')^{1/2}\ \phi(r,r') = (d\theta\ d\theta')^{1/2}\ \overline{\phi}(\theta,\theta') \qquad \text{(I.3.81b)}$$

où $\phi$ peut être $S_1$, $g_o$, ou $g_1$. Il est possible ainsi d'étudier commodément l'équation (I.3.80) dans sa nouvelle forme. On montre aisément que toute solution en est bornée quels que soient $\theta$ et $\theta'$, de sorte que $g_1\left(\frac{r}{r'}\right)$ est majorée par $C(rr')^{1/4}$ pour les grandes valeurs de r et r'. Il en résulte que l'analyse faite au paragraphe 3.1 peut être reconduite ici, à condition bien entendu que le déterminant de (I.3.80) ne soit pas accidentellement nul, cas que nous exclurons. Ainsi le comportement asymptotique du potentiel est lié à celui de la fonction g(r,r) :

$$V(r) = -\ 2r^{-1}\ \frac{d}{dr}\ r^{-1}\ g(r,r) + O(r^{-5/2}\ \text{Log}\ r) \qquad \text{(I.3.82)}$$

Pour obtenir le comportement asymptotique de $g_1$, appliquons 2 fois l'opérateur $S_1$ à la gauche de (I.3.80), et soustrayons le 1er résultat du second.

Nous obtenons, avec des notations évidentes :

$$-\ S_1 \cdot g_1 + S_1 \cdot S_1 \cdot S_1 \cdot g_1 = \left[S_1 \cdot S_1 - S_1\right] \cdot \left[S_1 - S_1 \cdot g_o\right] \qquad \text{(I.3.83)}$$

L'existence et l'unicité de la solution de (I.3.83) résulte de celles de la solution de (I.3.80). Comme il résulte de l'étude faite au paragraphe (1.2.5) que $S_1 \cdot S_1$ est majorée par $C\ (\text{Log}\ r)^{1/2}\ (\text{Log}\ r')^{1/2}$, et puisque le membre de droite de (I.3.83) possède la même borne, un changement de variables et de fonction défini par (I.3.81b) et

$$r = (\text{tg}\theta)^{1+\varepsilon} \qquad r' = (\text{tg}\ \theta')^{1+\varepsilon} \qquad \text{(I.3.84)}$$

nous permet d'obtenir une équation de Fredholm où l'intervalle d'intégration et le noyau sont finis. $S_1 \cdot g_1$ est donc majoré par $Cr^{\varepsilon}\ r'^{\varepsilon}$. De cette remarque et d'une estimation soigneuse de toutes les quantités contenues dans (I.3.80), avec l'aide des résultats des paragraphes (1.2.4) et (1.2.5) nous déduisons sans peine la forme suivante :

$$g_1(r,r') \sim f_2(r,r') + O\ (r^{\varepsilon}\ r'^{\varepsilon}) \sim \beta\left[T_{\overline{0}}(r,r') - T_0(r,r')\right] + O(r^{\varepsilon}r'^{\varepsilon}) \qquad \text{(I.3.85)}$$

La même étude faite sur $\frac{\partial}{\partial r'}\ g_1(r,r')$ et $\frac{\partial}{\partial r}\ g_1(r,r')$ conduit à la relation suivante :

$$\frac{d}{dr}\ g_1(r,r) \sim \beta\ \frac{d}{dr}\left[T_{\overline{0}}\ (r,r) - T_0\ (r,r)\right] + O(r^{\varepsilon})$$

En combinant (I.3.85), (I.3.86) et (I.3.79), on obtient enfin la valeur de V(r)

$$V(r) = -2r^{-1}\frac{d}{dr}\; r^{-1}\left[\alpha\, T_0(r,r) + \beta\, T_{\overline{0}}(r,r)\right] + O(r^{\varepsilon-2})$$

$$= -2r^{-1}\left[(\alpha-\beta)\, J_1'(2r) + (\alpha+\beta)\,(2r)^{-1}\, J_1(2r)\right] + O(r^{\varepsilon-2})$$

ou

$$\boxed{V(r) \sim -2\,\pi^{-1/2}\,(\alpha-\beta)\, r^{-3/2}\cos\left(2r - \tfrac{\pi}{4}\right) + O\,(r^{\varepsilon-2})} \qquad \text{(I.3.87)}$$

où on a fait usage des résultats de l'appendice A II et des relations de récurrence des fonctions de Bessel. La formule (I.3.87) montre clairement que un potentiel et un seul, celui donné par $\alpha = \beta$, peut décroître plus vite que $r^{-3/2}$ quand $r \to \infty$. De plus, ce potentiel est le seul, dans l'ensemble des potentiels équivalents, qui puisse avoir une queue non oscillante. Nous l'appellerons par la suite le potentiel spécial.

## CHAPITRE II

## PROPRIETES ANALYTIQUES DES POTENTIELS ET FONCTIONS DE JOST OBTENUS PAR LA METHODE DE NEWTON

Nous nous proposons de compléter dans ce chapitre l'étude descriptive des potentiels de Newton, que nous avons commencée dans le chapitre précédent.

Le chapitre est divisé en 2 sections :

Dans la première, nous montrons comment le potentiel peut être prolongé analytiquement dans le plan complexe des r comme une fonction méromorphe, dont les pôles sont des points isolés du plan complexe (sauf peut être à l'infini). Pour que le problème de diffusion ait un sens, il est indispensable de supposer qu'aucun de ces pôles n'est sur l'axe réel. Toutefois il convient de remarquer que, de toute façon, aucun pôle double ne peut être à l'origine. Il existe en effet un cercle centré à l'origine et de rayon non nul dans lequel la fonction $rV(r)$ est nécessairement analytique. Ces hypothèses ne restreignent d'ailleurs pas beaucoup le problème. En effet, les potentiels qui peuvent présenter la propriété scabreuse d'être infini sur l'axe réel positif constituent seulement des sous-classes particulières des potentiels de Newton, puisqu'une condition restrictive est imposée à leurs coefficients $c_\ell$ . Un exemple simple de potentiel est donné qui montre clairement toutes ces propriétés. Ce potentiel présente aussi une infinité de zéros dans le ler quartier du plan complexe.

Dans la seconde section, nous étudions en détail les fonctions de Jost données par les potentiels. Il y a eu ces dernières années tant de publications sur les fonctions de Jost et leurs zéros que toute information sur elles donne des indications sur l'intérêt que peut avoir le potentiel correspondant comme guide dans les problèmes de la théorie des champs.

Les propriétés des fonctions de Jost qui correspondent aux potentiels de Newton sont les suivantes :
elles sont méromorphes, dans le plan des moments angulaires complexes $\nu$, leurs pôles sont fixés aux entiers négatifs, leur terme dominant dans les secteurs où elles croissent à l'infini est en

$e^{\left|\frac{\pi\nu}{2}\right|}$. Elles ont en général un nombre infini de zéros, disposés, en ce qui concerne $f_2(\nu)$, sur une courbe de direction asymptotique nulle du 1er et du 2ème quartier. Il est possible qu'elles en possèdent également au voisinage de leurs pôles. Ces propriétés excluent la possibilité d'obtenir grâce à ces fonctions un prolongement de l'amplitude de diffusion qui satisfasse les conditions du théorème de Carlson et enlèvent ainsi tout intérêt aux potentiels de Newton comme guide dans les problèmes de la théorie des champs. Cela n'exclue évidemment pas qu'ils puissent avoir un intérêt phénoménologique dans d'autres problèmes. Ajoutons que les pôles de Regge correspondants sont situés à la frontière d'un domaine indiqué par André Martin comme ne devant pas contenir de pôles de Regge. Leur existence à l'infini dans le premier quartier et le théorème de Bessis montrent par l'absurde que les potentiels de Newton ne peuvent être à la fois holomorphes et majorés par une exponentielle décroissante dans le demi plan droit.

## SECTION I - PROLONGEMENT ANALYTIQUE DES POTENTIELS

Comme nous l'avons vu au cours du chapitre I, le potentiel est donné par la relation suivante :

$$V(r) = -2r^{-1} \frac{d}{dr} r^{-1} K(r,r) \qquad (II.1.1)$$

où $K(r,r)$ est une valeur particulière (pour $r' = r$) de la solution de l'équation F :

$$K(r,r') = f(r,r') - \int_0^r K(r,\rho)\, f(\rho,r')\, \rho^{-2}\, d\rho \qquad (II.1.2)$$

$f(r,r')$ est défini dans la méthode de Newton par le développement :

$$f(r,r') = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \; u_\ell(r)\, u_\ell(r') \qquad (II.1.3)$$

où
$$u_\nu(r) = (\frac{\pi}{2} r)^{1/2} J_{\nu+1/2}(r) \qquad (II.1.4)$$

Nous avons vu dans le chapitre I que les coefficients $c_\ell$ sont bornés quand $\ell \to \infty$, pourvu que les déphasages décroissent plus vite que $\ell^{-4/3}$ quand $\ell \to \infty$. Toutefois l'analyse qui va suivre requiert une condition beaucoup plus faible :

Hypothèse fondamentale

$$\exists\, p \Longrightarrow |\ell^{-p}\; c_\ell| < C$$

Pour étudier plus commodément notre problème, en évitant les coefficients $\rho^{-2}$ dans F, nous introduirons les deux fonctions auxiliaires :

$$\phi_r(r') \equiv \phi(r,r') = (rr')^{-1} f(r,r') \qquad (II.1.5)$$

$$K_r(r') = (rr')^{-1} K(r,r') \qquad (II.1.6)$$

qui permettent d'écrire F sous la forme :

$$K_r(r') = \phi_r(r') - \int_0^r d\rho\, K_r(\rho)\, \phi(\rho,r') \qquad (II.1.7)$$

1.1 - Prolongement analytique de V(r) au voisinage de r = 0

Nous utiliserons désormais les notations z (resp z') au lieu de r (resp r'), quand nous considérerons ces variables dans leur plan complexe respectif. Nous parlerons aussi du plan complexe, où z et z' sont simplement considérés comme des points. Pour une valeur donnée (réelle) de r, l'équation (II.1.2) est une équation de Fredholm.

Son noyau $\phi(r,r')$ peut être prolongé analytiquement en $\phi(z,z')$ grâce à la formule (II.1.3) où les fonctions $u_\ell(z)$ sont des fonctions entières. $\phi(z,z')$ est une fonction entière de z (resp. z'), pour toute valeur finie de z' (resp. z), et donc est une fonction entière de z et de z'. Ceci résulte immédiatement des majorations des fonctions $u_p(z)$ ($< C \left|\frac{z}{2}\right|^{p+1} / p!$) données par exemple dans l'appendice (A I), et de l'hypothèse faite sur les coefficients $c_\ell$. Pour tout couple de valeurs $z_1$ et $z_2$ contenues dans un cercle $(0,r_o)$ du plan complexe, $|\phi(z_1,z_2)|$ peut être majorée par une fonction définie positive $C(r_o)$ :

$$|\phi(z_1,z_2)| < C(r_o) \quad \forall\ z_1,z_2 \leq r_o \qquad \text{(II.1.8)}$$

Comme $C(r_o)$ tend vers une limite finie quand $r_o \to 0$, il est possible de trouver $r_M$ pour lequel :

$$r_M \ C(r) < 1 \qquad \forall\, r \leq r_M$$

Essayons alors de résoudre (II.1.7) par la méthode de Neuman. Les séries s'écriront :

$$K_r(r') = \phi(r,r') - \int_o^r dr_1\ \phi(r,r_1)\ \phi(r_1,r') + \ldots (-)^n \int_o^r \ldots \int_o^r dr_1 \ldots dr_n\ \phi(r,r_1)\ldots\phi(r_1,r')$$

(II.1.10)

On peut obtenir un minorant pour le rayon de convergence des séries (II.1.10) en remplaçant chaque terme par sa valeur absolue et $\phi$ par un majorant. Le terme général est ainsi majoré par :

$$r^n \left[C(r)\right]^n \quad C(r_o) \qquad \text{(II.1.11)}$$

où $r_o$ est un nombre supérieur à r et r'.

Il en résulte - et c'est là un résultat bien connu - que la série 1.10 converge certainement pour $r\ C(r) < 1$, ou

$$r \leq r_M - \varepsilon \qquad \text{(II.1.12)}$$

Supposons maintenant que r et r' puissent prendre des valeurs complexes z et z'. Chaque terme de la série (II.1.10) se prolonge en une fonction analytique de z et z' dont la valeur est indépendante du choix du contour d'intégration (0,z). Si l'on se rappelle maintenant les inégalités classiques [17] pour les intégrales complexes, en choisissant comme contour d'intégration un rayon issu de l'origine, on voit facilement que la borne (II.1.11) reste valable, avec r remplacé par $|z|$, si z et z' sont à l'intérieur du cercle $(0,r_o)$. La série (II.1.10) est donc uniformément convergente, et $K_z(z')$ est une fonction analytique de z (et une fonction entière de z') si $|z|$ est inférieur à $r_M-\varepsilon$. z V (z) est donc analytique dans le cercle $(0, r_M-\varepsilon)$.

## 1.2 - Prolongement analytique de V(z) pour tout z fini

Pour toute valeur finie de r, et sauf si - 1 est par hasard une valeur propre de (II.1.7), il est possible d'écrire la solution de cette équation sous forme d'un rapport de déterminants de Fredholm :

$$K_r(r') = \phi(r,r') + \left[\mathcal{D}(r)\right]^{-1} \int_o^r \phi(r,\rho)\ \overline{\mathcal{D}}(\rho,r')\ d\rho \qquad \text{(II.1.13)}$$

où

$$\mathcal{D}(r) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (m!)^{-1} \int_o^r \cdots \int_o^r K\begin{pmatrix} r_1, r_2 \cdots r_m \\ r_1, r_2 \cdots r_m \end{pmatrix} dr_1 \cdots dr_m \qquad \text{(II.1.14)}$$

$$\overline{\mathcal{D}}_r(\rho,r') = -\sum_{m=o}^{\infty} (m!)^{-1} \int_o^r \cdots \int_o^r K\begin{pmatrix} \rho, r_1 \cdots r_m \\ r, r_1 \cdots r_m \end{pmatrix} dr_1 \cdots dr_m \qquad \text{(II.1.15)}$$

Nous rappelons que le symbole K signifie le déterminant :

$$K\begin{pmatrix} x_1 \cdots x_m \\ y_1 \cdots y_m \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(x_1,y_1),\ \phi(x_1,y_2) \cdots \phi(x_1,y_m) \\ \phi(x_2,y_1) \cdots \\ \vdots \\ \phi(x_m,y_1),\ \phi(x_m,y_2) \cdots \phi(x_m,y_m) \end{bmatrix} \qquad \text{(II.1.16)}$$

Il résulte du théorème d'Hadamard et de (II.1.8) que

$$\int_o^r \cdots \int_o^r \left| K\begin{pmatrix} r_1 \cdots r_m \\ r_1 \cdots r_m \end{pmatrix} \right| dr_1 \cdots dr_m \leq \left[C(r)\right]^m m^{m/2}\ r^m \qquad \text{(II.1.17)}$$

$$\int_o^r \cdots \int_o^r \left| K\begin{pmatrix} \rho, r_1 \cdots r_m \\ r, r_1 \cdots r_m \end{pmatrix} \right| dr_1 \cdots dr_m \leq \left[C(r)\right]^m C(r_o)\ (m+1)^{\frac{m+1}{2}}\ r^m$$

(II.1.18)

Ainsi les séries (II.1.14) et (II.1.15) convergent pour toute valeur finie de r. Cela est bien connu. Mais supposons maintenant que r et r' puissent prendre des valeurs complexes, z et de z'. Chaque terme des séries (II.1.14) ou (II.1.15), si l'intégration se fait sur un contour (0,z), est une fonction analytique de z et de z'. Choisissons comme contours d'intégration des rayons issus de l'origine et rappelons que l'inégalité d'Hadamard est valable [18] aussi pour des déterminants dont les éléments sont complexes, pourvu que dans l'inégalité les éléments soient remplacés par leur module. On trouve ainsi que les bornes (II.1.17) et (II.1.18) restent valables si seulement r est remplacé par $|z|$ quand z et z' sont à l'intérieur du cercle $(0,r_o)$.

Sous leur forme complexe, les séries (II.1.14) sont donc uniformément convergentes pour toute valeur finie de z, de sorte que $\mathcal{D}(z)$ est une fonction entière de z.

Définissons maintenant $\mathcal{D}(z,z')$ par la formule suivante :

$$\mathcal{D}(z,z') = \int_o^z \phi(z,\rho)\, \overline{\mathcal{D}_z}(\rho,z') \qquad \text{(II.1.19)}$$

$\mathcal{D}(z,z')$ est une fonction entière de z et z'. $K_z(z')$ peut donc être prolongée dans le plan complexe des z, et pour toute valeur finie de z'comme une fonction méromorphe de z. Ses pôles, qui sont nécessairement des zéros de $\mathcal{D}(z)$, sont indépendants de z'. Inversement, un argument classique [19] et que l'on peut facilement étendre à notre cas, montre que tous les zéros de $\mathcal{D}(z)$ sont des pôles de $K_z(z')$.

## 1.3 - Pôles de z V (z)

Les équations (II.1.1) et (II.1.6) nous permettent d'écrire le prolongement analytique de V(r) :

$$V(z) = -\, 2z^{-1} \frac{d}{dz}\, z\, K_z(z) \qquad \text{(II.1.21)}$$

Puisque les seules singularités de $K_z(z)$ pour z fini sont des pôles, les seules singularités de z V (z) sont des pôles d'ordre au moins 2. Ces pôles sont associés par paires imaginaires conjuguées, ou sont réels. En effet, puisque les $c_\ell$ sont réels, si $z_i$ est un pôle, $z_i^*$ l'est aussi. Considérons maintenant un pôle $z_i$ de $K_z(z')$. Pour $z = z_i$, l'équation intégrale homogène associée à (II.1.7) a au moins une solution non nulle :

$$\chi_{z_i}(z') = -\int_o^{z_i} dz_1\ \chi_{z_i}(z_1)\, \phi(z_1,z') \qquad \text{(II.1.22)}$$

Cette solution est une fonction entière de z'. Son existence pourrait nous faire douter de la validité de la méthode de Newton : en effet, cette méthode suppose l'inexistence d'une solution de cette forme pour franchir l'étape suivante :

A partir de l'équation aux dérivées partielles vérifiée par f(r,r')

$$\begin{cases} \left[D_o(r) - D_o(r')\right] f(r,r') = 0 \\ \\ f(0,r') = f(r,0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(II.1.23)}$$

et à partir de l'équation F, on montre en effet dans cette méthode que la fonction $\xi(r,r')$ égale à

$$\xi(r,r') = \left\{ D(r) - D_o(r') \right\} K(r,r') \qquad \text{(II.1.24)}$$

où

$$D(r) = D_o(r) - r^2 V(r) \qquad \text{(II.1.25)}$$

est une solution de l'équation homogène.

Si celle-ci n'a pas de solution non nulle, K(r,r') est une solution de l'équation aux dérivées partielles.

$$\left[D(r) - D_o(r')\right] K(r,r') = 0 \qquad \text{(II.1.26)}$$

et de là toute la méthode s'ensuit.

Nous voyons donc que la méthode de Newton n'est pas valable aux points $z = z_i$. Cependant, ceci n'est pas une difficulté puisque les pôles sont des points isolés du plan complexe des z. Pour $z = z_i$, $\xi(z,z')$ est une fonction non nulle, de sorte que la solution (II.1.22) n'est pas nulle dans $L_2$. Par contre, $\xi(z,z')$ est nulle dans tout le plan complexe des z sauf à ces points isolés, de sorte qu'il existe une et une seule solution analytique de (II.1.2) et l'existence de $\xi(z,z')$ aux points $z_i$ n'est guère qu'un autre aspect de la non-analyticité de K(z,z') à ces points. Toutes les équations de la méthode de Newton sont donc valables pourvu qu'il n'y ait pas de pôle sur l'axe réel. Du reste, il est clair qu'un pôle sur l'axe réel, et qui serait au moins d'ordre 2, risquerait d'être incompatible avec une définition physique correcte du problème de diffusion. Il est remarquable que la formule (II.1.3) et celles qui relient les $c_\ell$ aux $\delta_\ell$ permettent de définir le problème de diffusion même dans ce cas, pourvu qu'on choisisse un contour d'intégration qui évite les pôles, et pourvu qu'il n'y ait pas de pôle à $+\infty$. Cela peut être la base d'une étude sur les potentiels singuliers.

Dans le cas général, il n'y aura pas de pôle à l'infini : $\mathcal{D}(\infty)$ ne peut être nul que pour des ensembles "particuliers" de déphasages. Par ailleurs, il existe au moins 2 cas où $\mathcal{D}(\infty)$ ne peut être nul. Le premier est celui où tous les $c_\ell$ sont suffisamment petits pour que les séries de Neuman convergent partout. Le second est le suivant, où tous les $c_\ell$ ont la même parité, ce qui permet de résoudre exactement l'équation obtenue en remplaçant dans F les bornes d'intégration (0,r) par les bornes (0,∞). Conformément à l'étude donnée au chapitre I sur les potentiels transparents, $K_r(r')$ est fini pour les grandes valeurs de r si la solution $g(r,r')$ de cette équation est elle-même finie. Comme cette solution est donnée sous forme d'une série de produits de fonctions de Bessel, il suffira que les coefficients soient finis ou bornés, ce qui est facile à vérifier. Dans le cas des potentiels transparents, elle est toujours finie. Dans l'exemple qui va suivre, elle peut ne pas l'être.

## 1.4 - Un exemple simple

Newton a signalé un cas simple où tous les déphasages sont faciles à calculer exactement. Nous allons reprendre cet exemple et inventorier les propriétés analytiques des potentiels auxquels il conduit.

On suppose qu'un seul coefficient $c_\ell$ - nous le désignerons par $c_{\ell_o}$ - est différent de zéro. On en déduit immédiatement les relations suivantes, conséquences simples de la méthode exposée au chapitre I, section I :

$$f(z,z') = c_{\ell_o}\, u_{\ell_o}(z)\, u_{\ell_o}(z') \qquad \text{(II.1.27)}$$

$$\phi_{\ell_o}(z) = \frac{u_{\ell_o}(z)}{1 + c_{\ell_o} L_{\ell_o}^{\ell_o}(z)} \qquad \text{(II.1.28)}$$

où, rappelons-le,

$$L_\ell^{\ell'}(z) = \int_o^z u_\ell(\rho)\, u_{\ell'}(\rho)\, \rho^{-2}\, d\rho$$

Par ailleurs,

$$K(z,z') = c_{\ell_o}\, \phi_{\ell_o}(z)\, u_{\ell_o}(z') = \frac{c_{\ell_o}\, u_{\ell_o}(z)\, u_{\ell_o}(z')}{1 + c_{\ell_o} L_{\ell_o}^{\ell_o}(z)} \qquad \text{(II.1.29)}$$

et donc

$$\Phi_\ell(z) = u_\ell(z) - \int_o^z K(z,z')\, u_\ell(z')\, z'^{-2}\, dz'$$

$$= u_\ell(z) - \frac{c_{\ell_o}\, u_{\ell_o}(z)\, L_{\ell_o}^{\ell}(z)}{1 + c_{\ell_o} L_{\ell_o}^{\ell_o}(z)} \qquad \text{(II.1.30)}$$

Le potentiel est donné par

$$V(z) = -\frac{2}{z}\, c_{\ell_o} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{1}{z} \frac{\left[u_{\ell_o}(z)\right]^2}{1 + c_{\ell_o} L^{\ell_o}_{\ell_o}(z)} \right\} \qquad (II.1.31)$$

Enfin les déphasages et les coefficients $A_\ell$ peuvent se déduire des relations (I.1.16) et (I.1.17). On trouve

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \delta_\ell = 0 \text{ pour } \ell - \ell_o \text{ pair} \\ \operatorname{tg} \delta_\ell = \dfrac{1}{(\ell_o - \ell)(\ell_o + \ell + 1)} \dfrac{c_{\ell_o}}{1 + \frac{\pi}{2} c_{\ell_o}/(2\ell_o + 1)} \text{ pour } \ell - \ell_o \text{ impair} \end{cases} \qquad (II.1.32)$$

$$\begin{cases} A_\ell = 1 \text{ pour } \ell - \ell_o \text{ pair non nul} \\ A_{\ell_o} = \left[1 + \frac{\pi}{2} c_{\ell_o}/(2\ell_o + 1)\right]^{-1} \text{ pour } \ell = \ell_o \\ A_\ell = (\cos \delta_\ell)^{-1} \text{ pour } \ell - \ell_o \text{ impair} \end{cases} \qquad (II.1.33)$$

Examinons alors la structure analytique du potentiel

Il est fini à l'origine et analytique si $\ell_o$ est supérieur ou égal à 1. Pour $\ell_o$ égal à 0, z V (z) est analytique dans un voisinage non nul de l'origine.

Pôles sur l'axe réel

La fonction $L^{\ell_o}_{\ell_o}(r)$ est une fonction impaire, régulièrement croissante de $-\frac{\pi}{2} / (2\ell_o + 1)$ à $+\frac{\pi}{2}(2\ell_o + 1)$ quand r croit de $-\infty$ à $+\infty$. Le potentiel (II.1.31) n'a donc pas de pôle sur l'axe réel si et seulement si :

$$|c_{\ell_o}| < \frac{2(2\ell_o + 1)}{\pi} \qquad (II.1.34)$$

Si $c_{\ell_o}$ sort de ces limites, et suivant le signe de $c_{\ell_o}$, il y aura un pôle et un seul soit sur l'axe réel négatif soit sur l'axe réel positif.

Pôles dans le ler quartier

D'intéressantes études ayant été faites récemment, et en particulier par Bessis [20], sur les propriétés des potentiels holomorphes dans le ler quartier du plan complexe, il est intéressant d'y préciser la structure analytique du potentiel (II.1.31). Nous nous contenterons de montrer qu'il possède une infinité de pôles sur une courbe de direction nulle.

Ecrivons pour cela le dénominateur sous la forme :

$$D = 1 + \frac{\pi}{2} \frac{c_{\ell_o}}{(2\ell_o+1)} - c_{\ell_o} \int_z^{+\infty} d\rho\, \rho^{-2} \left[ u_{\ell_o}(\rho) \right]^2 \qquad \text{(II.1.35)}$$

Rappelons que des expressions bien connues des fonctions de Bessel nous permettent d'écrire

$$u_{\ell_o}(z) = \sin\left(z - \ell_o \tfrac{\pi}{2}\right) \left[ 1 + \varepsilon_1(z) \right] + \varepsilon_2(z) \cos\left(z - \ell_o \pi/2\right)$$

où $z\,\varepsilon_1(z)$ et $z\,\varepsilon_2(z)$ sont des polynômes en $z^{-1}$.

Supposons que Re z et Im z $\to \infty$ , on peut écrire :

$$u_{\ell_o}(z) \sim \frac{i}{2}\, e^{-i\,(z-\ell_o\,\pi/2)} \left[ 1 + \varepsilon_o(z) \right]$$

et il est bien facile de montrer que $\varepsilon_o(z)$ est analytique pour $z \neq 0$, et que $z\,\varepsilon_o(z)$, $z^2\,\varepsilon'_o(z)$ et $z^3\,\varepsilon''_o(z)$ sont bornés quand Re z et Im z tendent vers $+\infty$ . En faisant alors deux intégrations par parties et en évaluant le reste sur une droite parallèle à l'axe réel, on peut écrire D sous la forme :

$$D = 1 + \frac{\pi}{2} \frac{c_{\ell_o}}{2\ell_o+1} - \frac{1}{4}\, c_{\ell_o} \frac{e^{-2iz}\,(-1)^{\ell_o}}{z^2} \left(1 + \varepsilon(z)\right) \qquad \text{(II.1.36)}$$

où $z\,\varepsilon(z)$ est analytique et bornée quand Re z et Im z tendent vers l'infini. Désignons alors par $z_o$ un zéro de

$$D_o = 1 + \frac{\pi}{2} \frac{c_{\ell_o}}{2\ell_o+1} - \frac{1}{4}\, c_{\ell_o} (-1)^{\ell_o} \frac{e^{-2iz}}{z^2} = \alpha\left(e^{\beta+i\gamma} - z^{-2}\, e^{-2iz}\right)$$

(II.1.37)

où $\alpha$, $\beta$, et $\gamma$ sont des constantes appropriées. Il est facile de voir que dans le ler quartier, $D_o$ a une infinité de zéros, situés sur la courbe :

$$\text{Im } z = \frac{1}{2}\, \text{Log}\left[ (\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2 \right]$$

aux points

$$\text{Re } z = -\frac{1}{2}\,\gamma - \text{Arc tg}\,\frac{\text{Im } z}{\text{Re } z} + k\pi$$

Asymptotiquement cette courbe tend vers la courbe de direction nulle :

$$\text{Im } z = \text{Log Re } z \qquad \text{(II.1.38)}$$

aux points $\quad \text{Re } z = -\frac{1}{2}\ \gamma\ + k\pi$

Nous allons montrer maintenant que si $\varepsilon(z)$ et $\varepsilon'(z)$ sont bornés par $|\varepsilon| \ll 1$, dans un voisinage de $z_o$ de rayon $2\varepsilon$, $D - D_o(z_o)$ a un zéro dans ce voisinage. Il suffit pour cela de montrer que la propriété est vraie pour $z_o^{-2}\ e^{-2iz_o} - z^{-2}\ e^{-2iz}\ (1 + \varepsilon(z))$, ou encore pour

$$f(z) = 1 - e^{-2i(z-z_o)}\ (1 + \eta(z - z_o))$$

où $\eta$ et $\eta'$ sont majorés en module par $\varepsilon$ dans le cercle $\Gamma(z_o, 2\varepsilon)$, et analytiques dans ce cercle. Pour montrer la propriété, il suffit d'évaluer l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\ dz$$

qui est égale d'après le théorème de Cauchy au nombre de zéros de $f(z)$ dans le cercle considéré. Comme sur la courbe $\Gamma$ on a, à des termes en $\varepsilon^2$ près :

$$3\ \varepsilon < |\ f(z)| < 5\ \varepsilon \qquad 1 - 2\varepsilon < |\tfrac{1}{2} f'(z)| < 1 + 2\varepsilon$$

$$dz = 2\ \varepsilon\ d\theta\ ,$$

l'intégration montre qu'il existe un zéro et un seul dans le voisinage considéré. Il est facile de voir que les propriétés de $\varepsilon(z)$ permettent d'obtenir des majorations de ce type et montrent ainsi que les zéros de $D(z)$ tendent asymptotiquement vers les zéros de $D_o(z)$. $D(z)$ a donc une infinité de zéros, qui tendent asymptotiquement vers les points II.1.38, et ces zéros sont des pôles du potentiel.

Comportement asymptotique du potentiel

La relation (II.1.31) montre immédiatement que le potentiel décroit comme $r^{-2}$ quand $r \to \infty$, pourvu toutefois que $(c_{\ell_o})^{-1}$ soit différent de $-\ \pi/2\ /\ (2\ell_o + 1)$.

Le cas d'un pôle à + ∞

Si $c_{\ell_o}$ est égal à $\frac{-2(2\ell_o+1)}{\pi}$, V(r) se comporte à l'infini comme C $\frac{\sin 2r}{r}$, et cette décroissance est insuffisante pour que le problème de diffusion ait un sens. Il n'est pas étonnant que dans ce cas tg $\delta_\ell$ et $A_\ell$ soient infinis pour $\ell - \ell_o$ impair.

Autres exemples

Des exemples semblables à celui que nous venons d'étudier peuvent être obtenus en prenant un nombre fini de coefficients $c_{\ell_o}$ non nuls. Ces exemples conduisent à un noyau [14] de Pincherle-Goursat dans l'équation de Fredholm F, ce qui permet d'en obtenir une solution exacte.

## SECTION 2 - DEFINITION ET PROPRIETES ANALYTIQUES DES FONCTIONS DE JOST

### Contenu

Après avoir montré que les solutions régulières de l'équation de Schrödinger pour une valeur quelconque de l'indice ($\ell \to \nu$, Re $\nu > -1$) peuvent s'obtenir à partir du noyau $K(r,r')$ par une relation qui interpole simplement celle qui définit les $u_\ell(r)$, nous nous servons de la forme asymptotique de cette relation pour obtenir les fonctions de Jost. Ce sont des fonctions méromorphes aux pôles fixés aux entiers négatifs et le développement obtenu n'est autre que leur développement [21] de Mittag-Leffler. On se sert du résultat obtenu pour montrer l'unitarité de la fonction qui interpole l'amplitude de diffusion.

Des relations sont ensuite données qui permettent d'étudier les propriétés des fonctions de Jost soit que l'on connaisse le comportement asymptotique des coefficients $c_\ell$, soit que l'on connaisse celui des déphasages. On discute ensuite de la position des zéros de $f_2(\nu)$. On montre que pour les grandes valeurs de $|\nu|$ ces zéros sont localisés d'une part au voisinage de l'axe réel négatif, d'autre part sur une courbe de direction nulle dans le 1er et le 2ème quartier. Cette courbe est frontière d'un domaine décrit par A. Martin [22] comme ne devant pas contenir de pôles. D'autre part, on sait, depuis que Bessis [20] l'a montré, que si le potentiel est holomorphe et majoré par une exponentielle décroissante dans le demi plan droit, il n'y a pas de pôle dans le premier quartier à l'infini. L'existence de pôles de Regge dans le premier quartier prouve que, en général, les potentiels construits par la méthode de Newton ne possèdent pas ces propriétés. Du reste, l'exemple que nous avons étudié présente une infinité de pôles dans le premier quartier.

### 2.2.1 - Définition des fonctions de Jost

Rappelons que $u_\nu(r)$ est une fonction propre de $D_o(r)$

$$D_o(r)\, u_\nu(r) = \nu(\nu+1)\, u_\nu(r) \qquad \text{(II.2.1)}$$

A partir de la fonction $K(r,\rho)$, nous pouvons définir, pour toute valeur de $\nu$ telle que Re $\nu > -1$, la fonction suivante :

$$\Phi_\nu(r) = u_\nu(r) - \int_o^r K(r,\rho)\, u_\nu(\rho)\, \rho^{-2}\, d\rho \qquad \text{(II.2.2)}$$

En appliquant à (II.2.2), ou à la forme qu'elle prend dans le plan complexe des r, l'opérateur différentiel $D(z)$, et avec quelques calculs algébriques (cf. Appendice A VI), on montre que

pour toute valeur de z différente des pôles $z_i$, $\Phi_\nu(z)$ est une fonction propre de D(z) :

$$D(z)\ \Phi_\nu(z) = \nu(\nu+1)\ \Phi_\nu(z) \qquad \text{(II.2.3)}$$

Par ailleurs, il résulte de (II.2.2) et de l'existence de $(r\rho)^{-1} K$ pour r ou $\rho$ nuls que $\Phi_\nu(r)$ est la solution régulière de l'équation de Schrödinger (II.2.3), pourvu toutefois que Re $\nu > -1$. En effet

$$\left.\begin{aligned} u_\nu(r) &\sim r^{\nu+1} \\ \Phi_\nu(r) &\sim r^{\nu+1} + O(r^{\nu+2}) \end{aligned}\right\} \quad \text{quand } r \to 0 \qquad \text{(II.2.4)}$$

Rappelons maintenant le développement de K(r,r') :

$$K(r,r') = \sum_{\ell=0}^{\infty} c_\ell \Phi_\ell(r)\ u_\ell(r') \qquad \text{(II.2.5)}$$

En substituant ce résultat dans (II.2.2), on obtient :

$$\Phi_\nu(r) = u_\nu(r) - \sum_{\ell'} L_\nu^{\ell'}(r)\ c_{\ell'}\ \Phi_{\ell'}(r) \qquad \text{(II.2.6)}$$

où
$$L_\nu^{\ell'}(r) = \int_0^r d\rho\ \rho^{-2}\ u_\nu(\rho)\ u_{\ell'}(\rho) \qquad \text{(II.2.7)}$$

Pour obtenir les fonctions de Jost, faisons tendre r vers $\infty$ dans (II.2.6). Alors, et pourvu que le potentiel décroisse à l'infini plus vite que $r^{-1}$, les fonctions $u_\nu(r)$ et $\Phi_\nu(r)$ ont le comportement asymptotique suivant :

$$\left.\begin{aligned} u_\nu(r) &\sim (2i)^{-1} \left[ e^{i(r - \nu\pi/2)} - e^{-i(r-\nu\pi/2)} \right] \\ \Phi_\nu(r) &\sim (2i)^{-1} \left[ f_1(\nu)\ e^{ir} - f_2(\nu)\ e^{-ir} \right] \end{aligned}\right\} \qquad \text{(II.2.8)}$$

La relation (II.2.6) est valable pour toute valeur <u>finie</u> de r, aux conditions générales de l'hypothèse I faite au début de la section précédente. Par contre, pour pouvoir remplacer les fonctions par leur comportement asymptotique, il est strictement indispensable que les séries (II.2.6) convergent uniformément pour toute valeur de r réelle et positive, <u>y compris + $\infty$</u>. Or des résultats bien connus donnent des $L_\nu^{\ell'}(r)$ l'expression suivante :

$$L_\nu^{\ell'}(r) = \frac{u_\nu(r)\ \frac{d}{dr}\ u_{\ell'}(r) - u_{\ell'}(r)\ \frac{d}{dr}\ u_\nu(r)}{\ell'(\ell'+1) - \nu(\nu+1)} \qquad \text{(II.2.9)}$$

Nous avons montré au chapitre I (Appendice A I) que $u_\ell(r)$ et $u_\ell'(r)$ sont bornées, pour toute valeur réelle et positive de r, par $C\ \ell^{1/3}$. S'il n'y a pas de pôle sur l'axe réel positif, $K_r(r')$ est borné pour toute valeur réelle positive de r et de r'. Il résulte alors de (II.2.2) que $|\Phi_\nu(r)|$ est aussi bornée par $C\ \nu^{1/3}$ pour toute valeur réelle positive de r. Quelques calculs simples montrent qu'il en est de même pour $|\Phi'_\nu(r)|$. Les séries (II.2.6) et les séries dérivées convergent par suite pour toute valeur positive de r si

$$|c_\ell| < \ell^{1/3-\varepsilon} \qquad \text{(II.2.10)}$$

Si cette très importante condition est satisfaite, nous pouvons remplacer les fonctions dans (II.2.6) par leur comportement asymptotique (II.2.8) et obtenir :

$$\begin{cases} f_1(\nu) = e^{-i\pi\nu/2} - \sum_{\ell'} \dfrac{\sin(\nu-\ell')\ /2}{\nu(\nu+1)-\ell'(\ell'+1)}\ a_{\ell'}\ (1 + i\ \mathrm{tg}\ \delta_{\ell'})\ e^{-i\ell'\pi/2} \\ \\ f_2(\nu) = e^{i\pi\nu/2} - \sum_{\ell'} \dfrac{\sin(\nu-\ell')\ \ \pi/2}{\nu(\nu+1)-\ell'(\ell'+1)}\ a_{\ell'}\ (1 - i\ \mathrm{tg}\ \delta_{\ell'})\ e^{i\ell'\ \pi/2} \end{cases} \qquad \text{(II.2.11)}$$

où nous avons posé, comme au chapitre I :

$$a_\ell = c_\ell\ A_\ell \cos \delta_\ell \qquad \text{(II.2.12)}$$

Il résulte des bornes données pour les fonctions $\Phi_\ell$ que A est bornée par $C\ \ell^{1/3}$. Il résulte par ailleurs de l'étude faite au chapitre I (1.3.2) que $A_\ell$ tend vers 1 quand $\ell \to \infty$ si seulement les déphasages sont majorés par $C\ \ell^{-3}$. Comme les $a_\ell$ sont dans ces conditions majorés par une constante indépendante de $\ell$, la condition (II.2.10) est satisfaite et, bien qu'elle n'ait été que sous-entendue dans la méthode de Newton, celle-ci est cohérente.

## 2.2.2 - Propriétés des fonctions de Jost et de l'amplitude de diffusion

### 2.2.2.1 - Unitarité

Nous remarquerons tout d'abord que la condition d'unitarité

$$S(\nu)\ \ S^*(\nu^*) = 1 \qquad \text{(II.2.13)}$$

est valable dans tout le plan complexe des $\nu$, puisque

$$S(\nu) = \frac{e^{i\pi\nu/2}\, f_1(\nu)}{e^{-i\pi\nu/2} f_2(\nu)} \qquad \text{(II.2.14)}$$

et puisqu'il est bien évident dans l'expression (II.2.11) que

$$\left[f_1(\nu^*)\right]^* = f_2(\nu) \qquad \text{(II.2.15)}$$

2.2.2.2 - Propriétés analytiques des fonctions de Jost

Elles sont tout à fait évidentes dans le développement (II.2.11). Elles peuvent être prolongées dans le plan complexe comme des fonctions méromorphes, qui possèdent des pôles simples aux entiers négatifs. Le développement (II.2.11) n'est autre que leur développement de Mittag-Leffler.

2.2.2.3 - Une autre expression des fonctions de Jost

Diverses propriétés des fonctions que nous allons étudier sont liées aux propriétés asymptotiques des coefficients de leur développement (II.2.11). Dans la forme (II.2.11), et compte tenu du fait que les déphasages tendent vers zéro quand $\ell \to \infty$, l'étude de ces propriétés se fait facilement à partir des coefficients $c_\ell$ , c'est-à-dire à partir du potentiel. Il serait intéressant de disposer d'une forme analogue, mais où le comportement asymptotique des coefficients serait lié directement à celui des déphasages. Il est possible de la trouver quand $\delta_\ell$ est majoré pour $\ell \to \infty$ par $C\, \ell^{-3-\varepsilon}$. Nous montrons en effet dans l'appendice (A III) que l'on peut obtenir dans ce cas la formule suivante :

$$\hat{a} = \alpha \hat{v} + M^{-1}\, \hat{\Delta}' \qquad \text{(II.2.16)}$$

où les composantes de $\hat{\Delta}'$ ont le même comportement asymptotique que les déphasages $\delta_\ell$, c'est-à-dire le rapport par $\delta_\ell$ de la composante de rang $\ell$ est borné supérieurement en valeur absolue.

En substituant ce résultat dans (II.2.11) et en utilisant les relations (A IV 7) et (A IV 16) on obtient pour $f_2(\nu)$ :

$$\begin{aligned} f_2(\nu) = e^{i\pi\nu/2} \; & -\alpha \sum_{\ell'} L_\nu^{\ell'}\, v_{\ell'}\, e^{-i\ell'\pi/2} \\ & + i \sum_{\ell'} L_\nu^{\ell'}\, a_{\ell'}\, \mathrm{tg}\, \delta_{\ell'}\, e^{i\ell'\pi/2} - \sum_{\ell'} c_\nu^{\ell'}\, \Delta'_{\ell'} \end{aligned} \qquad \text{(II.2.17)}$$

où les $C_\nu^{\ell'}$ sont donnés par

$$\begin{cases} C_\nu^{2p+1} = -(-1)^p\ 4\ \pi^{-1}\ (2p+3/2) \left[\dfrac{\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(p+1)}\ \dfrac{\Gamma(\nu/2+1/2)}{\Gamma(\nu/2+1)}\right]^2 L_\nu^{2p+1} \\ C_\nu^{2p} = -(-1)^p\ 4\ \pi^{-1}\ (2p+1/2) \left[\dfrac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+1)}\ \dfrac{\Gamma(\nu/2+1)}{\Gamma(\nu/2+1/2)}\right]^2 L_\nu^{2p} \end{cases} \qquad (II.2.18)$$

et
$$L_\nu^\mu = \left[(\nu+1/2)^2 - (\mu+1/2)^2\right]^{-1} \sin(\nu-\mu)\,\pi/2 \qquad (II.2.19)$$

Le deuxième terme du membre de droite de (II.2.17) peut, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant, être calculé exactement. Le développement de $f_2(\nu)$ peut être obtenu à partir de celui de $f_1(\nu)$ par la relation (II.2.15). Il est clair que le développement (II.2.17) est très analogue au développement (II.2.11) mais, une fois le terme exactement calculable écarté, la partie qui reste a ses coefficients qui décroissent aussi vite que $\delta_\ell$. Les propriétés que nous allons étudier peuvent être indifféremment étudiées sur l'un ou l'autre développement. Nous nous limiterons toutefois au développement (II.2.11) plus simple.

### 2.2.2.4 - Position des pôles de Regge pour les grandes valeurs de $|\nu|$

Les pôles de Regge sont donnés par les zéros de $f_2(\nu)$. Nous nous proposons de chercher leur position dans le plan complexe des $\nu$ pour les grandes valeurs de $|\nu|$. Nous séparerons en deux parties les coefficients de $L_\nu^{\ell'}$ dans $f_2(\nu)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} a_{2n}\ (1 - i\ \mathrm{tg}\ \delta_{2n}) = \alpha\ \bar{\mu}_{2n} + \bar{a}_{2n} \\ a_{2n+1}\ (1 - i\ \mathrm{tg}\ \delta_{2n+1}) = \beta\ \bar{\mu}_{2n+1} + \bar{a}_{2n+1} \end{cases} \qquad (II.2.20)$$

et on peut admettre que les $\bar{a}_n$ décroitront et tendront vers zéro quand $n \to \infty$ plus vite que $n^{-1}$. Il résulte de l'analyse faite au chapitre I que cela suppose seulement que $|\delta_\ell|$ soit borné par $C\,\ell^{-7/3-\varepsilon}$. Si on substitue dans la relation (II.2.11) les relations (II.2.20) on sépare dans (II.2.11) 5 termes, $T_1 \ldots T_5$, dont le premier, $T_1$ est égal à $e^{i\pi\nu/2}$, et nous allons considérer séparément chacun des suivants. Les termes $T_2$ et $T_4$, qui sont reliés respectivement aux termes $\bar{\mu}_{2n}$ et $\bar{\mu}_{2n+1}$, peuvent être calculés exactement à l'aide des formules données dans le chapitre I pour les $\bar{\mu}_n$ et de formules connues :

$$-\alpha^{-1}\ T_2 = \sum_n L_\nu^{2n}\ i^n\ \bar{\mu}_{2n} = \pi/2 \int_0^\infty J_{\nu+1/2}(\rho) \sum_n \bar{\mu}_{2n}\ J_{2n+1/2}(\rho)\ (-1)^n$$
$$= (\pi/2)^{1/2} \int_0^\infty J_{\nu+1/2}(\rho)\ J_0(\rho)\ \rho^{-1/2}\ d\rho = \frac{1}{2}\ \frac{\Gamma(\nu/2+1/2)\Gamma(\nu/2+1/2)}{\Gamma(\nu/2+1)\Gamma(\nu/2+1)}\ \cos\nu\,\pi/2 \qquad (II.2.21)$$

de sorte que, quand $|\nu| \to \infty$ avec $|\mathrm{Arg}\ \nu| < \pi$ :

$$T_2 \sim - \nu^{-1}\ \alpha \cos \nu \frac{\pi}{2} \exp\left[ - \frac{1}{2} \nu^{-1} + \frac{1}{6}\ \nu^{-2} \right] \qquad \text{(II.2.22)}$$

De la même façon :

$$T_4 = - i\beta \sum_p L_\nu^{2p+1}\ \bar{\mu}_{2p+1}\ i^{2p} = - \frac{i\beta}{2}\ \frac{\Gamma(\nu/2+1)\,\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\nu/2+3/2)\Gamma(\nu/2+1/2)} \sin\nu \frac{\pi}{2} \qquad \text{(II.2.23)}$$

Ainsi, quand $|\nu| \to \infty$, avec $|\mathrm{Arg}\ \nu| < \pi$

$$T_4 \sim - i\ \nu^{-1}\ \beta \sin\nu \frac{\pi}{2}\ \exp\left[ - \frac{1}{2} \nu^{-1} - \frac{1}{3} \nu^{-2} \right] \qquad \text{(II.2.24)}$$

Considérons maintenant les termes $T_3$ et $T_5$, qui peuvent être groupés en

$$T_3 + T_5 = \sum_{\ell'}\ \bar{a}_{\ell'}\ e^{i\ell'\,\pi/2}\ \ \frac{\sin\,(\nu-\ell')\,\pi/2}{(\nu+1/2)^2-(\ell'+1/2)^2} \qquad \text{(II.2.25)}$$

Excluons pour commencer notre étude, et afin d'éviter toute difficulté qui provienne de l'axe réel, une bande $|\mathrm{Im}\ \nu\ | < \varepsilon_o$, où $\varepsilon_o$ est un nombre positif fixé. On peut réécrire (II.2.25) sous la forme :

$$e^{i\nu\ \pi/2} \sum_{\ell'}\ \frac{\bar{a}_{\ell'}}{(2i)\left[(\nu+1/2)^2-(\ell'+1/2)^2\right]} - e^{-i\nu\pi/2} \sum_{\ell'}\ \frac{\bar{a}_{\ell'}\ e^{i\ell'\pi}}{2i\ \left[(\nu+1/2)^2-(\ell'+1/2)^2\right]}$$

(II.2.26)

Supposons que $|\bar{a}_n|$ soit majoré de la façon suivante :

$$|\bar{a}_n| < C\ n^{-k} \qquad (k > 1) \qquad \text{(II.2.27)}$$

Une identité élémentaire nous permet d'écrire :

$$\sum_{\ell'}\ \frac{\bar{a}\ ,}{(\nu+1/2)^2-(\ell'+1/2)^2} = \sum_{\ell'}\ \bar{a}_{\ell'}\ \left\{ 1 + \frac{(\ell'+1/2)^2}{(\nu+1/2)^2} + \ldots \left[\frac{\ell'+1/2}{\nu+1/2}\right]^{2p-2} \right\}$$

$$+ \sum_{\ell'}\ \bar{a}_{\ell'} \frac{\left[\ell'+1/2\right]^{2p}}{(\nu+1/2)^{2p}\left[\nu(\nu+1)-\ell'(\ell'+1)\right]} \qquad \text{(II.2.28)}$$

Choisissons p égal à $E\left(\frac{k+1-\varepsilon}{2}\right)$, de façon que

$$-1 \leq 2p - k < 1 - \varepsilon \qquad \text{(II.2.29)}$$

La condition précédente et les résultats de l'appendice AV montrent immédiatement que le reste dans (II.2.28) est de l'ordre $|\nu|^{-k-1+\varepsilon}$ quand $|\nu| \to \infty$ (avec $\varepsilon_o$ $\nu \to \infty$), de sorte que le dernier terme de la série est plus grand que le reste. Le même travail peut être fait pour le 2ème terme de (II.2.26). On trouve ainsi que $T_3 + T_5$ peut être écrit de la manière suivante :

$$T_3 + T_5 = e^{i\nu\pi/2} \left\{ \frac{T_+^1}{(\nu+1/2)^2} + \frac{T_+^2}{(\nu+1/2)^4} + \ldots \frac{T_+^p}{(\nu+1/2)^{2p}} + O\,(\nu^{-k-1+\varepsilon}) \right\}$$

$$- e^{-i\nu\pi/2} \left\{ \frac{T_-^1}{(\nu+1/2)^2} + \frac{T_-^2}{(\nu+1/2)^4} + \ldots \frac{T_-^p}{(\nu+1/2)^{2p}} + O(\nu^{-k-1+\varepsilon}) \right\} \qquad \text{(II.2.30)}$$

où les coefficients $T_+^q$ et $T_-^q$ sont des combinaisons linéaires des $\bar{a}_\ell$. Par ailleurs, les termes $T_1$, $T_2$ et $T_4$ peuvent être groupés de la façon suivante :

$$T_2 + T_4 = -\frac{\nu^{-1}\, e^{-1/2\nu}}{2} \left\{ e^{i\pi\nu/2} \left[ (\alpha+\beta) + 1/4\ (\alpha-\beta)\ \nu^{-2} + O(\nu^{-2}) \right] \right.$$

$$\left. + e^{-i\pi\nu/2} \left[ (\alpha-\beta) + 1/4\ (\alpha+\beta)\ \nu^{-2} + O(\nu^{-3}) \right] \right\} \qquad \text{(II.2.31)}$$

En comparant $T_1 (= e^{i\pi\nu/2})$ à la somme des autres termes, on voit que $T_1$ est dominant dans le 1/2 plan inférieur, où il ne peut donc y avoir de zéros pour les grandes valeurs de $|\nu|$. Quand $\nu$ prend ses valeurs dans le demi plan supérieur, on peut distinguer plusieurs cas, mais dans tous les cas si $|\nu|$ est grand, il est indispensable que Im $\nu$ soit au moins d'ordre Log |Re $\nu$| pour que les termes $(T_2 + T_3 + T_4 + T_5)$ puissent être comparables à $T_1$. On peut donc se contenter d'étudier ces termes pour Re $\nu$ et Im$\nu$ grands. Suivant les valeurs des $\delta_\ell$, d'une part, de $\alpha$ d'autre part, on peut avoir :

1 - $\alpha \neq \beta$ . Dans ce cas $f_2(\nu)$ peut se mettre sous la forme :

$$f_2(\nu) = e^{i\pi\nu/2} - \frac{\nu^{-1}}{2}\ (\alpha-\beta)\ e^{-i\pi\nu/2}\ (1+\varepsilon_1(\nu)) \qquad \text{(II.2.32)}$$

2 - $\alpha = \beta$ . $f_2(\nu)$ peut alors se mettre sous la forme :

$$f_2(\nu) = e^{i\pi\ \nu/2} - (\nu+1/2)^{-2}\ T\ e^{-i\pi\ \nu/2}\ (1 + \varepsilon_2(\nu)) \qquad \text{(II.2.33)}$$

où T provient de la combinaison de $T_-^1$ et du coefficient de $\nu^{-2}$ dans les termes tout calculés. Il peut arriver que T soit nul. Ceci impose une certaine condition sur les $c_\ell$ ou sur les déphasages, donc rèstreint le problème à une sous classe de potentiels. Le terme $(T_1 + T_2 + T_3 + T_4)$ est alors d'ordre $\nu^{-3}$, avec $\alpha + \beta$ comme coefficient. Ce terme d'ordre $\nu^{-3}$ n'est nul que si $\beta = 0$. On peut continuer le processus jusqu'au terme d'ordre $\nu^{-2p}$, en nous limitant ainsi à des sous classes de plus en plus restreintes dans les potentiels ou dans les déphasages proposés. Si k est infini, p peut être étendu jusqu'à l'infini. Nous limiterons notre étude au cas où l'on rencontre un coefficient non nul avant d'atteindre la limite k de convergence. La fonction $f_2(\nu)$ peut alors être étudiée sur la forme :

$$f_2(\nu) = e^{i\pi\nu/2} - \nu^{-q}\, T_{(q)}\, e^{-i\pi\nu/2}\, (1 + \varepsilon_2(\nu)) \qquad \text{(II.2.34)}$$

Cette forme est analogue à la forme (II.1.36) étudiée au chapitre I et peut être étudiée de la même façon. Si $T_{(q)} = e^{\sigma+i\tau}$, on trouve que $f_2(\nu)$ a une infinité de zéros dans le demi plan complexe supérieur, qui tendent vers les points (Re $\nu = \tau + 2k$) sur la courbe

$$\text{Im } \nu = \pi^{-1}\, q\, \text{Log } |\text{Re } \nu| \qquad \text{(II.2.35)}$$

Cette courbe est à la frontière d'un domaine décrit par André Martin[22] comme ne devant pas contenir de pôles de Regge. Quoiqu'il paraisse, il n'est pas étonnant de trouver ainsi des pôles de Regge à l'infini dans le demi plan droit. Leur inexistence a été démontrée [20] seulement pour un potentiel holomorphe dans le 1er quartier du plan complexe des r, ce qui n'est pas le cas de ceux que nous étudions.

En ce qui concerne la bande $|\text{Im } \nu| < 1$, que nous avons laissé de côté jusqu'à présent, il est facile de démontrer avec l'aide des résultats de l'appendice A V , qu'elle ne contient pas de zéros de $f_2(\nu)$ pour les grandes valeurs de $\nu$ si Re $\nu$ est > 0. Il est possible qu'elle en contienne pour Re $\nu$< 0. Ils ne présentent pas d'intérêt.

2.2.5 - Propriétés analytiques de l'amplitude de diffusion

Il résulte de l'étude précédente et de la relation (II.2.14) que $S(\nu)$ est une fonction méromorphe de $\nu$. Sur la direction $-i\infty$, $S(\nu)$ se comporte en général comme $C\, \nu^{-q}\, e^{i\pi\nu}$. Ce comportement, et l'existence de pôles pour Re $\nu$ infini et Im $\nu$ positif excluent la possibilité d'appliquer le théorème de Carlson. Elles excluent aussi la possibilité pour la classe des potentiels de Newton d'inclure des superpositions de potentiels de Yukawa. En effet, il faudrait pour cela que $\delta_\ell$ décrût exponentiellement et qu'il n'y eût pas de pôles de Regge quand Re $\nu \to +\infty$. Or, si on

utilise la relation (II.2.17), on voit qu'il est possible d'imposer une infinité de contraintes aux déphasages afin d'essayer d'éviter un comportement comme (II.2.34). Mais si on annule ainsi toutes les combinaisons linéaires de déphasages, la seule solution restante est celle où tous les déphasages sont nuls, et conduit au potentiel nul.

Remarque - On peut prévoir dans le cas général que s'il peut exister plusieurs potentiels équivalents, et si $S(\nu)$ est bornée par $e^{|\pi\nu|}$ sur la direction où elle "explose", il est nécessaire que pour tous ces potentiels, sauf peut être un, $S(\nu)$ ait une infinité de zéros ou de pôles dans le demi plan droit. En effet, s'il n'y en avait pas au-delà de $\mathrm{Re}\ \nu = A$, on pourrait calculer dans cette région $\left[S(\nu)\right]^{1/2}$, cette fonction satisferait les conditions du théorème de Carlson, et son interpolation serait donc unique, ce qui ne peut se produire que pour un seul des potentiels équivalents.

Conclusion

On peut conclure de ce chapitre que la classe des potentiels de Newton est à la fois beaucoup plus restreinte et beaucoup moins intéressante qu'il ne le paraissait au premier abord. D'autres restrictions apparaitront au chapitre III, mais on peut d'ores et déjà affirmer que si le potentiel doit, dans le problème considéré, être calculé à partir des interactions mésoniques, de grosses difficultés risquent de provenir des propriétés scabreuses de ses fonctions de Jost.

# CHAPITRE III

## UNE METHODE GENERALE

Au cours du chapitre II, nous avons trouvé successivement deux restrictions sur les propriétés analytiques des potentiels construits par la méthode de Newton. La première (ch.III, section I) concerne leurs singularités : les potentiels de Newton ne peuvent être prolongés que comme des fonctions méromorphes, possédant des pôles d'ordre au moins 2 (sauf un pôle simple à l'origine). Dans la section II du chapitre II, nous avons trouvé une limitation plus subtile de la méthode. La limite asymptotique prise par Newton [5] pour établir les équations matricielles fondamentales suppose implicitement que les $c_\ell$ ne peuvent diverger davantage que $\ell^{1/3}$ quand $\ell \to \infty$ . Cette limitation est beaucoup plus sévère que la première. En effet, l'analyse donnée dans la section I (ch.II) est valable si $f(z,z')$ est une fonction entière de z et de z', et cette propriété suppose seulement que $c_n/n!\ n!$ décroisse plus vite que la puissance $n^{\text{ième}}$ de tout nombre fixé.

Une nouvelle limitation résulte d'une analyse reproduite dans l'appendice (A VIII). Nous y montrons que si z V(z) peut être prolongée analytiquement dans un cercle centré à l'origine ($|z| < \Gamma$), et si on définit à partir du potentiel une fonction K(z,z) par la formule :

$$K(z,z) = -\frac{1}{2}\ z \int_0^z u\ V(u)\ du \qquad \text{(III.0.1)}$$

alors K(z,z) peut être développé dans le cercle $\Gamma$ en fonction des produits $u_\ell \Phi_\ell$ et $u_{\ell+1/2}\ \Phi_{\ell+1/2}$ des solutions régulières de l'équation de Schrödinger pour la particule libre et en présence de potentiel. Les coefficients de ce développement, que nous appellerons par la suite le développement intrinsèque du potentiel, sont uniques :

$$K(z,z) = \sum_0^\infty c_\ell\ u_\ell(z)\ \Phi_\ell(z) + \sum_0^\infty c_{\ell+1/2}\ u_{\ell+1/2}(z)\Phi_{\ell+1/2}(z) \qquad \text{(III.0.2)}$$

Les coefficients des termes $u_{\ell+1/2}\ \Phi_{\ell+1/2}$ ne sont en général pas nuls. Ils le sont seulement si une certaine équation intégrale, que nous ne donnerons pas ici, relie la partie réelle et la partie imaginaire du potentiel. Bien plus, si le potentiel est une fonction analytique paire dans un voisinage non nul de l'origine, les coefficients des $u_\ell\ \Phi_\ell$ sont tous nuls ! La méthode de

Newton ne permet donc pas d'obtenir des potentiels pairs. Un potentiel de Newton est donc caractérisé par les 3 propriétés suivantes :

1) On peut le prolonger dans le plan complexe comme une fonction méromorphe, dont les pôles sont d'ordre au moins 2.

2) Les coefficients de son développement intrinsèque sont soumis à une limitation asymptotique sévère.

3) Les coefficients d'ordre demi entier dans son développement intrinsèque sont nuls.

Ces propriétés ne sont pas contrebalancées par des propriétés très utiles des fonctions de Jost. Nous avons vu que l'amplitude de diffusion ne peut en général remplir les conditions d'application du théorème de Carlson, et par suite, ces potentiels ne peuvent comprendre de "bonnes" superpositions de potentiels de Yukawa que comme des cas très particuliers. Du reste, la présence de pôles de Regge au voisinage de $+\infty$ est en elle-même une caractéristique désagréable de cette classe de potentiels.

Ceci nous amène à chercher si une analyse semblable ou du moins analogue ne peut pas conduire à des classes plus vastes de potentiel, tout en laissant possible l'étude du problème inverse. C'est à cette question que nous allons répondre maintenant.

## SECTION I - UNE CLASSE TRES GENERALE DE POTENTIELS

Introduisons au départ une fonction $f(r,r')$ définie par l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases} \left[ D_o(r) - D_o(r') \right] f(r,r') = 0 \\ f(0,r') = f(r,0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(III.1.1)}$$

où, rappelons-le, $D_o(r)$ est défini par :

$$D_o(r) \equiv r^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + 1 \right) \qquad \text{(III.1.2)}$$

Il est facile de voir que l'équation et les conditions aux limites sont satisfaites par n'importe quelle fonction de la forme suivante :

$$f(r,r') = \sum_{\mu} c_\mu \, u_\mu(r) \, u_\mu(r') \qquad \text{(III.1.3)}$$

où les fonctions $u_\mu(r)$ sont de la forme :

$$u_\mu(r) = (\pi/2 \, r)^{1/2} \, J_{\mu+1/2}(r) \qquad \text{(III.1.4)}$$

et où $\mu > -1$.

Dans (III.1.3), $\mu$ est un paramètre discret ou continu (dans ce cas la somme doit être remplacée par une intégrale), et qui peut prendre n'importe quelle valeur réelle strictement supérieure à - 1. Nous supposerons en outre la majoration suivante :

$$\exists \; k \text{ et } \alpha \Rightarrow c_\mu \; / \; \mu! \; \mu! < C \, \mu^k \, |\alpha|^{-2\mu} \qquad \text{(III.1.5)}$$

On sait que les fonctions $u_\mu(z)$ sont égales au produit par $z^\mu$ d'une fonction entière. On peut donc prolonger $f(z,z')$ pour toute valeur finie de $z'$ (resp. $z$) comme une fonction analytique de $z$ (resp. $z'$) dans un cercle $|z||z'| < |\alpha|^2$, excepté sur une coupure issue de l'origine et que l'on peut toujours faire coincider avec l'axe réel négatif respectivement dans le plan complexe des $z$ ou celui des $z'$. Pour définir une détermination de $f(z,z')$, il suffit de définir une détermination de Log $z$ et Log $z'$, puisque la non-analycité n'apparait qu'à travers des termes en $e^{\mu \text{ Log } z}$ et $e^{\mu \text{ Log } z'}$.

Nous désignerons par la suite par $\mathcal{D}_o$ un domaine du plan complexe comprenant un cercle centré à l'origine et de rayon $(|\alpha| - \varepsilon)$, coupé le long de l'axe réel négatif. Il est clair que si z et z' sont tous deux dans $\mathcal{D}_o$, la fonction f(z,z') est analytique en z et z'.

Définissons maintenant à partir de f(z,z') une fonction K(z,z') par l'équation intégrale :

$$K(z,z') = f(z,z') - \int_o^z dz_1 \, z_1^{-2} \, K(z,z_1) \, f(z_1,z') \qquad \text{(III.1.6)}$$

Pour éviter toute difficulté, nous ferons une première restriction sur les fonctions f(z,z') en supposant $\mu \geq 0$, et ceci quoiqu'il soit possible d'étendre l'analyse jusqu'à $\mu = -1/2 + \varepsilon$.

La méthode que nous avons développée au chapitre II peut s'appliquer avec seulement quelques modifications triviales pour étudier (III.1.6), si seulement z et z' appartiennent au domaine $\mathcal{D}_o$.

Introduisons en effet les deux fonctions :

$$\phi_r(r') \equiv \phi(r,r') = (rr')^{-1} \, f(r,r') \qquad \text{(III.1.7)}$$

$$K_r(r') = (rr')^{-1} \, K(r,r') \qquad \text{(III.1.8)}$$

nous pouvons appliquer la méthode de Fredholm à l'équation suivante, équivalente à (III.1.6) :

$$K_z(z') = \phi_z(z') - \int_o^z dz_1 \, K_z(z_1) \, \phi(z_1,z') \qquad \text{(III.1.9)}$$

En suivant pas à pas la méthode donnée dans la section I du chapitre II, on peut facilement montrer que le déterminant $\mathcal{D}(z)$ de cette équation est analytique dans le domaine $\mathcal{D}_o$ du plan complexe des z. $K_z(z')$ est égal au quotient par $\mathcal{D}(z)$ d'une fonction de z et z' analytique en l'une et l'autre variables quand z et z' appartiennent toutes deux à $\mathcal{D}_o$ :

$$K_z(z') = \left[\mathcal{D}(z)\right]^{-1} \mathcal{D}(z,z') \qquad \text{(III.1.10)}$$

De fait, la méthode d'analyse nous permet de dire un peu plus : pour toute valeur de z dans $\mathcal{D}_o$, $\mathcal{D}(z,z')$ est une fonction analytique de z' dans le cercle $|z'| \leq |\alpha|^2 \, |z|^{-1}$. Il résulte de tout cela que z V (z) est analytique dans le domaine $\mathcal{D}_o$ du plan complexe des z, sauf en des points isolés $z_i$. Comme les séries de Neuman pour l'équation (III.3.9) convergent au moins dans un cercle non nul centré à l'origine du plan complexe des z, aucun de ces pôles ne peut être à l'origine. Mais nous devons en outre supposer qu'aucun pôle ne peut être sur l'axe réel positif,

puisqu'il conduirait à un pôle double de V(r) et le problème de diffusion n'aurait, sensu stricto plus de valeur physique. Comme nous l'avons remarqué, ce cas peut servir de base à une étude des potentiels singuliers.

Il est facile de voir que nos raisonnements peuvent s'appliquer dans n'importe quel domaine connexe $\mathcal{D}$ où $\phi(z,z')$ est une fonction analytique de z et z', pourvu que ce domaine renferme l'origine. Dans leurs formes originales, nos raisonnements supposent qu'il est possible d'atteindre tout point du domaine sur un rayon issu de l'origine, mais il est possible de tourner cette difficulté en changeant le contour d'intégration. On peut démontrer maintenant que K(z,z') satisfait l'équation aux dérivées partielles et les conditions aux limites suivantes dans le domaine d'analycité $\mathcal{D}$ de K(z,z') :

$$\begin{cases} \left[D(z) - D_o(z')\right] K(z,z') = 0 & \text{(III.1.11)} \\ K(z,0) = K(0,z') = 0 & \text{(III.1.12)} \end{cases}$$

où D(z) est égal à $D_o(z) - z^2 V(z)$, et V(z) à

$$V(z) = -2 z^{-1} \frac{d}{dz} z^{-1} K(z,z) \qquad \text{(III.1.13)}$$

Pour démontrer ces relations, il suffit d'appliquer D(z) et $D_o(z')$ à K(z,z'), et de faire quelques manipulations algébriques élémentaires (intégration par parties, etc.), exposées en détail dans l'appendice A VI, afin de montrer que le membre de droite de (III.1.11) satisfait la forme homogène de l'équation (III.1.6), et est donc nul dans le domaine d'analyticité $\mathcal{D}$ de $\phi$, à l'exclusion des pôles.

On peut définir maintenant les fonctions :

$$\Phi(z) = u_\nu(z) - \int_o^z dz_1 \, z_1^{-2} K(z,z_1) \, u_\nu(z_1) \qquad \text{(III.1.14)}$$

et montrer facilement (cf. appendice A VI) que ce sont des solutions régulières de l'équation de Schrödinger :

$$\begin{cases} D(z) \, \Phi_\nu(z) = \nu(\nu+1) \, \Phi_\nu(z) \\ \Phi_\nu(o) = o \end{cases} \qquad \text{(III.1.15)}$$

Si maintenant nous substituons (III.1.3) dans (III.1.6), nous voyons que $K(r,r')$ peut être écrit sous la forme :

$$K(r,r') = \sum_{\mu} c_{\mu} \mathcal{K}_{\mu}(r)\, u_{\mu}(r')$$

où $\mathcal{K}_{\mu}(r) = u_{\mu}(r) - \int_0^r dr'\ r'^{-2}\ K(r,r')\, u_{\mu}(r')$

En comparant avec (III.1.14), nous pouvons en déduire l'importante relation :

$$K(z,z') = \sum_{\mu} c_{\mu}\, \Phi_{\mu}(z)\ \ u_{\mu}(z') \qquad \text{(III.1.16)}$$

et en reportant ce résultat dans (III.1.14), nous obtenons le développement de $\Phi_{\nu}(z)$, valable dans $\mathcal{D}(z)$ :

$$\Phi_{\nu}(z) = u_{\nu}(z) - \sum_{\mu} L_{\nu}^{\mu}(z)\, c_{\mu}\, \Phi_{\mu}(z) \qquad \text{(III.1.17)}$$

où

$$L_{\nu}^{\mu}(z) = \int_0^z dz_1\, z_1^{-2}\, u_{\nu}(z_1)\, u_{\mu}(z_1) \qquad \text{(III.1.18)}$$

Si $\mathcal{D}(z)$ renferme l'axe réel positif tout entier, ou si $V(r)$ peut être prolongé, sur l'axe réel positif, de façon logiquement compatible avec (III.1.11), les équations de (III.1.11) à (III.1.17) définissent complètement le problème de la diffusion non relativiste par un potentiel $V(r)$.

Notre méthode permet donc d'étudier les problèmes de diffusion pour une très large classe de potentiels. Des coefficients $c_{\mu}$ convenablement choisis nous permettent d'obtenir pour le potentiel un large choix de singularités dans le plan complexe. Comme deux fonctions analytiques ne peuvent pas prendre la même valeur sur un intervalle continu sans coïncider [23] dans tout leur domaine d'analyticité, deux fonctions analytiques $V(z)$ distinctes conduiront à des potentiels $V(r)$ distincts sur l'axe réel positif. On peut alors se demander si deux ensembles de coefficients $c_{\mu}$ distincts conduisent à des fonctions analytiques $V(z)$ distinctes. Nous pouvons le démontrer dans le cas où les $c_{\mu}$ sont rationnels et où on peut trouver pour tout l'ensemble des valeurs de $\mu$ considérées un dénominateur commun. Soit $m$ ce dénominateur ; introduisons, avec une détermination convenable, les nouvelles variables :

$$\zeta = z^{1/m} \qquad ; \qquad \zeta' = z'^{1/m} \qquad \text{(III.1.19)}$$

Les fonctions $u_{\mu}(z)$ (resp. $u_{\mu}(z')$), sont des fonctions entières de $\zeta$(resp. $\zeta'$). La fonction

$f(z,z')$ est donc une fonction analytique de $\zeta$ et de $\zeta'$ dans le cercle $(0,|\alpha|^{1/m})$. L'équation (III.1.9) devient, avec des notations évidentes :

$$\overline{K}_\zeta(\zeta') = \overline{\Phi}_\zeta(\zeta') - q \int_0^\zeta \overline{K}_\zeta(\zeta_1)\ \overline{\Phi}(\zeta_1,\zeta')\ \zeta_1^{q-1}\, d\zeta_1 \qquad \text{(III.1.20)}$$

Il est clair que $\overline{K}_\zeta(\zeta_1)$ peut se mettre sous la forme

$$\overline{K}_\zeta(\zeta_1) = \frac{\overline{\mathcal{D}}(\zeta,\zeta_1)}{\mathcal{D}(\zeta)} \qquad \text{(III.1.21)}$$

où les deux fonctions $\overline{\mathcal{D}}$ sont analytiques en l'une et l'autre variable quand celles-ci prennent leur valeur toutes deux dans le cercle $(0,|\alpha|^{1/m})$.

Remarquons en passant que l'équation (III.1.20) met en évidence la méthode que l'on peut employer pour étendre l'ensemble des valeurs de $\mu$ sur l'axe réel négatif - ici jusqu'à $\mu = m^{-1}\ E\ (\frac{m-1}{2})$. Il suffit de poser alors :

$$\overline{\Phi}\ (\zeta_1,\zeta') = \zeta_1^{-E(\frac{m-1}{2})}\ \zeta^{-E(\frac{m-1}{2})}\ \overline{\Phi}^*(\zeta_1,\zeta')$$

$$K_\zeta(\zeta') = \zeta^{-E(\frac{m-1}{2})}\ (\zeta')^{-E(\frac{m-1}{2})}\ K^*_\zeta(\zeta') \qquad \text{(III.1.22)}$$

La fonction K satisfait une équation dont le noyau est régulier et à laquelle on peut étendre les raisonnements précédents. Toutefois, comme nous l'avons déjà dit, nous écarterons ce cas et supposerons que $\mu$ est positif ou nul. $\zeta^m\ V(\zeta^m)$ est alors analytique dans le cercle $|\zeta|<|\alpha|^{1/m}$, sauf peut être en des points isolés, zéros de $\mathcal{D}(\zeta)$. Aucun de ces points ne peut être à l'origine, de sorte que $V(\zeta^m)$ est une fonction holomorphe dans un cercle non nul centré à l'origine.

Nous montrons en appendice (A VIII) qu'inversement, si $z\ V(z)$ est une fonction holomorphe de $\zeta = z^{1/m}$ dans un cercle $(|\zeta|< |\alpha|^{1/m})$, et si $K(z,z)$ lui est associé par (III.0.1), $K(z,z)$ peut être développé sur les produits $u_{\frac{p}{m}}\ \Phi_{\frac{p}{m}}$ et $u_{\frac{p+1/2}{m}}\ \Phi_{\frac{p+1/2}{m}}$

$$K(z,z) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{\frac{p}{m}}\ u_{\frac{p}{m}}\ \Phi_{\frac{p}{m}} + \sum_{p=0}^{\infty} c_{\frac{p+1/2}{m}}\ u_{\frac{p+1/2}{m}}\ \Phi_{\frac{p+1/2}{m}}$$

et ce développement est unique.

Il en résulte que les coefficients $c_\mu$ sont bien dans ce cas caractéristiques du potentiel. Lorsque les $\mu$ ne sont pas rationnels, ou bien leurs rapports sont rationnels, et, dans ce cas, on peut faire une étude du même genre que plus haut, ou il ne l'est pas, et dans ce cas les fonctions diffèrent par leur structure analytique. Ainsi les coefficients $c_\mu$ permettent en général de définir des potentiels différents.

## SECTION II - LE PROBLEME INVERSE

Nous allons maintenant nous restreindre à une classe beaucoup plus étroite de fonctions $f(r,r')$ donc de potentiels, de façon à pouvoir relier simplement les déphasages aux coefficients $c_\mu$. Nous ferons les hypothèses suivantes :

A - Tous les $\mu$ sont rationnels, de sorte que leur suite est dénombrable, et la somme (III.1.1) est discrète.

B - Les coefficients $c_\mu$ sont majorés de la manière suivante :

$$|c_\mu| < \mu^{1/3-\varepsilon} \qquad \text{(III.2.1)}$$

Ces hypothèses nous permettent d'obtenir le développement des fonctions de Jost :

$$\begin{cases} f_1(\nu) = e^{-i\pi\nu/2} - \sum_\mu \dfrac{\sin(\nu-\mu)\pi/2}{\nu(\nu+1)-\mu(\mu+1)}\ c_\mu A_\mu e^{i\delta\mu} e^{-i\mu\pi/2} \\ f_2(\nu) = e^{i\pi\nu/2} - \sum_\mu \dfrac{\sin(\nu-\mu)\pi/2}{\nu(\nu+1)-\mu(\mu+1)}\ c_\mu A_\mu e^{-i\delta\mu} e^{i\mu\pi/2} \end{cases} \qquad \text{(III.2.2)}$$

et, pour les $\mu_o$ réels :

$$A_{\mu_o} e^{i\delta\mu_o} e^{-\frac{i\pi\mu_o}{2}} = e^{-\frac{i\pi\mu_o}{2}} - \sum_\mu L^\mu_{\mu_o} c_\mu A_\mu e^{i\delta\mu} e^{-i\mu\pi/2} \qquad \text{(III.2.3)}$$

### 3.2.1 - Définition du problème inverse

Devant les possibilités qui sont offertes, nous voyons qu'il est impossible de formuler le problème inverse sans strictement spécifier la classe de potentiel dans laquelle nous cherchons un potentiel qui reproduise l'ensemble des déphasages. Le problème sera en général indéterminé. Supposons par exemple que nous cherchions un potentiel pour lequel :

1 - Les $c_\mu$ satisfont la condition (III.2.1)

2 - Les valeurs de $\mu$ sont rationnelles et renferment tous les entiers.

Nous allons prouver qu'il est possible dans ces conditions de choisir arbitrairement, modulo quelques conditions très faibles, tous les $c_\mu$ qui ne sont pas des nombres entiers, et résoudre le problème.

Démonstration

Soit $\hat{\Phi}$ le vecteur de composantes $A_\mu \; e^{i(\delta_\mu - \pi/2)}$. Nous pouvons considérer $\hat{\Phi}$ comme la somme de $\hat{\Phi}_1$, de composantes $A_\ell \; e^{i(\delta_\ell - \pi/2)}$, et de $\hat{\Phi}_o$, qui possède toutes les autres composantes. De la même façon, soit $\hat{u}$ le vecteur de composantes $e^{-\frac{i\pi\mu}{2}}$, on le considèrera comme la somme de $\hat{u}_o$ et $\hat{u}_1$.

L'équation (III.2.3), où nous donnerons successivement à $\mu_o$ toutes les valeurs de $\mu$, peut s'écrire en notations matricielles :

$$\hat{\Phi} = \hat{u} - L \, C \, \hat{\Phi} \qquad \text{(III.2.4)}$$

où $C$ est la matrice diagonale de composantes $c_\mu$.

Nous pouvons maintenant diviser $L$ en quatre parties qui couplent deux à deux les vecteurs $\hat{\Phi}_o$, $\hat{\Phi}_1$ :

$$\hat{\Phi}_1 = \hat{u}_1 - L^{(1)}_{(1)} \; C_1 \, \hat{\Phi}_1 - L^{(o)}_{(1)} \; C_o \, \hat{\Phi}_o \qquad \text{(III.2.5)}$$

$$\hat{\Phi}_o = \hat{u}_o - L^{(1)}_{(o)} \; C_1 \, \hat{\Phi}_1 - L^{(o)}_{(o)} \; C_o \, \hat{\Phi}_o \qquad \text{(III.2.6)}$$

Nous choisirons arbitrairement la matrice $C_o$, en imposant seulement aux coefficients, si les valeurs de $\mu$ auxquelles ils correspondent sont en nombre infini, de rester majorés par $C \, |\mu|^{-5/3-\varepsilon}$ quand $\mu \to \infty$

Il est possible, en général, d'inverser la matrice $1 + L^{(o)}_{(o)} \; C_o$, par exemple par la méthode de Fredholm. Si les éléments de $C_o$ sont suffisamment petits les séries de Neuman convergent et l'inverse existe à coup sûr. On en déduit que :

$$\hat{\Phi}_o = (1 + L^{(o)}_{(o)} \; C_o)^{-1} \, (\hat{u}_o - L^{(1)}_{(o)} \; C_1 \, \hat{\Phi}_1) \qquad \text{(III.2.7)}$$

En reportant dans (III.2.5), nous obtenons :

$$\hat{\Phi}_1 = \hat{\xi}_1 - \left[ L^{(1)}_{(1)} + S^{(1)}_{(1)} \right] C_1 \, \hat{\Phi}_1 \qquad \text{(III.2.8)}$$

où l'on a posé :

$$\left.\begin{aligned} \hat{\xi}_1 &= \hat{u}_1 - L^{(o)}_{(1)} \; C_o \, (1 + L^{(o)}_{(o)} \; C_o)^{-1} \, \hat{u}_o \\ S^{(1)}_{(1)} &= - L^{(o)}_{(1)} \; C_o \, (1 + L^{(o)}_{(o)} \; C_o)^{-1} \, L^{(1)}_{o} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(III.2.9)}$$

Soient $\xi_\ell\, e^{i\Delta_\ell}$ les composantes de $\hat{\xi}_1$, $L_\ell^{\ell'}$ et $S_\ell^{\ell'}$ celles de $L_{(1)}^{(1)}$ et $S_{(1)}^{(1)}$. L'équation (III.2.8) est équivalente au système d'équations :

$$A_\ell = \xi_\ell\, e^{i(\Delta_\ell-\delta_\ell)} - \sum_{\ell'=0}^{\infty} (L_\ell^{\ell'} + S_\ell^{\ell'})\, c_{\ell'}\, A_{\ell'}\, e^{i(\delta_{\ell'}-\delta_\ell)}\, i^{\ell-\ell'} \qquad \text{(III.2.10)}$$

Nous allons maintenant séparer chacune des deux matrices $L_{(1)}^{(1)}$ et $S_{(1)}^{(1)}$ en deux parties qui couplent respectivement les composantes d'indice de même parité et les composantes d'indice de parité différente.

$$\begin{cases} L_\ell^{\ell'} = i^{\ell'-\ell-1}\, M_\ell^{\ell'} + \dfrac{\pi}{2(2\ell+1)}\, \delta_\ell^{\ell'} \\ \overset{+}{S}{}_\ell^{\ell'} = -\, i^{\ell-\ell'}\, S_\ell^{\ell'} \quad \text{pour } \ell-\ell' \text{ pair, 0 autrement} \\ \overset{-}{S}{}_\ell^{\ell'} = i^{\ell-\ell'+1}\, S_\ell^{\ell'} \quad \text{pour } \ell-\ell' \text{ impair, 0 autrement} \end{cases} \qquad \text{(III.2.11)}$$

En reportant ces expressions dans (III.2.10), on obtient

$$A_\ell \left(1 + \frac{\pi}{2(2\ell+1)}\, c_\ell + \overset{+}{S}{}_\ell^{\ell}\, c_\ell\right) \qquad \text{(III.2.12)}$$

$$= \xi_\ell\, e^{i(\Delta_\ell-\delta_\ell)} + i \sum_{\ell'} (M_\ell^{\ell'} + \overset{-}{S}{}_\ell^{\ell'})\, c_{\ell'}\, A_{\ell'}\, e^{i(\delta_{\ell'}-\delta_\ell)} + \sum_{\ell'} \overset{+}{S}{}_\ell^{\ell'}\, c_{\ell'}\, A_{\ell'}\, e^{i(\delta_{\ell'}-\delta_\ell)}$$

Si on prend maintenant la partie imaginaire des deux membres on obtient la formule fondamentale :

$$\xi_\ell \sin(\delta_\ell - \Delta_\ell) = \sum_{\ell'} (M_\ell^{\ell'} + \overset{-}{S}{}_\ell^{\ell'})\, c_{\ell'}\, A_{\ell'} \cos(\delta_{\ell'}-\delta_\ell) + \sum_{\ell'} \overset{+}{S}{}_\ell^{\ell'}\, c_{\ell'}\, A_{\ell'} \sin(\delta_{\ell'}-\delta_\ell)$$

(III.2.13)

Introduisons maintenant les notations vectorielles $\hat{\xi}$ et $\hat{a}$ pour les vecteurs de composantes respectives $\xi_\ell \sin(\delta_\ell-\Delta_\ell)$ et $a_\ell (= c_\ell A_\ell \cos\delta_\ell)$, et la notation matricielle $\tan\delta$ pour la matrice diagonale de composantes $\tan\delta_\ell$, nous obtenons l'équation suivante :

$$\hat{\xi} = (P + Q)\, \hat{a} = P\, (1 + P^{-1} Q)\, \hat{a} \qquad \text{(III.2.14)}$$

où

$$\begin{cases} P = M\,(1 + M^{-1}\,\bar{S} + M^{-1}\,\overset{+}{S}\,\tan\delta) \\ Q = \tan\delta\left[(M + \bar{S})\,\tan\delta - \overset{+}{S}\right] \end{cases} \qquad \text{(III.2.15)}$$

Les matrices $\overset{+}{S}$ ou $\bar{S}$ dépendent de l'ensemble de paramètres arbitraires $C_o$ de sorte que, en général, des matrices de la forme $(1 + S)$ ou semblables peuvent être inversées, par exemple par la méthode de Fredholm. Si ces paramètres sont choisis suffisamment petits, les séries de Neuman convergent dans tous les problèmes d'inversion que nous avons rencontrés - celle de $1 + L_o^o\,C_o$, celle de P, celle de $1 + P^{-1}\,Q$. En tout état de cause, nous supposerons ces inversions possibles, et les coefficients $a_\ell$ seront donnés par la relation suivante :

$$\hat{a} = (1 + P^{-1}\,Q)^{-1}\,P^{-1}\,\hat{\xi} \qquad \text{(III.2.16)}$$

La connaissance des $a_\ell$ nous permet de tirer les $A_\ell$ de (III.2.12), et celle des $A_\ell$ nous permet d'obtenir les coefficients $c_\ell$. Bien entendu l'indétermination usuelle apparait quand est introduite la matrice $M^{-1}$. Mais cette difficulté peut être étudiée de la même façon qu'au chapitre I.

Ainsi, même si on limite les coefficients $c_\mu$ aux valeurs rationnelles et si on leur impose une forte condition asymptotique, on voit que l'indétermination dans le problème inverse à énergie donnée a la puissance du dénombrable. Or, nous n'avons pas utilisé de suites continues de $c_\mu$ qui nous auraient fourni d'autres potentiels. Il est vraisemblable que l'indétermination a la puissance du continu. Il est clair que même si on se limite au cas des potentiels analytiques dans un voisinage non nul de l'origine, l'indétermination aura encore la puissance du dénombrable. Il existe toutefois un cas où l'indétermination est levée, c'est le cas des potentiels analytiques et pairs dans un voisinage non nul de l'origine.

### 3.2.2 - Problème inverse pour les potentiels pairs

Nous supposerons encore que les coefficients $c_\mu$ sont astreints à la condition (III.2.1). Nous supposerons en outre que seuls les coefficients $c_{\ell+1/2}$ sont différents de zéro. Par raison de commodité, nous introduirons un coefficient $c_{-1/2}$ et chercherons ensuite à le rendre égal à 0. La relation (III.2.3) prend la forme :

$$A_\ell\, e^{i\delta_\ell}\, e^{-\frac{i\pi\ell}{2}} = e^{-\frac{i\pi\ell}{2}} - \sum_p L_\ell^{p-1/2}\, c_{p-1/2}\, A_{p-1/2}\, e^{i\delta_{p-1/2}}\, e^{-i(p-1/2)\pi/2} \qquad \text{(III.2.17)}$$

ou encore

$$A_\ell = e^{-i\delta_\ell} - \sum_p L_\ell^{p-1/2}\, c_{p-1/2}\, A_{p-1/2}\, e^{i\left[\delta_{p-1/2}-\delta_\ell\right]} e^{i(\ell+1/2-p)\pi/2} \qquad \text{(III.2.18)}$$

En prenant les parties imaginaires des 2 membres, on obtient l'équation aux tangentes :

$$- \operatorname{tg}\delta_\ell = \sum_p L_\ell^{p-1/2} \sin(\ell+1/2-p)\,\pi/2 \;\; a_{p-1/2}(1+\operatorname{tg}\delta_{p-1/2}\operatorname{tg}\delta_\ell)$$

$$+ \sum_p L_\ell^{p-1/2} \cos(\ell+1/2-p)\pi/2 \;\; a_{p-1/2}(\operatorname{tg}\delta_{p-1/2} - \operatorname{tg}\delta_\ell) \qquad \text{(III.2.19)}$$

Dans cette équation intervient une matrice fondamentale

$$m_\ell^{p-1/2} = L_\ell^{p-1/2} \sin(\ell+1/2-p)\pi/2 = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(\ell+1/2)^2-p^2} \qquad \text{(III.2.20)}$$

tandis que

$$L_\ell^{p-1/2}\cos(\ell+1/2-p)\pi/2 = \frac{1}{2}(-1)^{\ell-p}\,\frac{1}{(\ell+1/2)^2-p^2} \qquad \text{(III.2.21)}$$

On peut donc écrire :

$$- \operatorname{tg}\delta_\ell = \sum_p m_\ell^{p-1/2}\, a_{p-1/2}\left[1+\operatorname{tg}\delta_{p-1/2}\operatorname{tg}\delta_\ell + (-1)^{\ell+p}(\operatorname{tg}\delta_{p-1/2} - \operatorname{tg}\delta_\ell)\right] \qquad \text{(III.2.22)}$$

tandis qu'il est possible de relier entre eux les déphasages d'ordre demi entier de la même manière que dans la méthode de Newton, à condition toutefois que leur ordre soit positif.

$$\operatorname{tg}\delta_{p'+1/2} = \sum_p {}^{(o)}M^{p+1/2}_{p'+1/2}\; a_{p+1/2}\left[1+\operatorname{tg}\delta_{p+1/2}\operatorname{tg}\delta_{p'+1/2}\right] \qquad \text{(III.2.23)}$$

Remarquons maintenant que la matrice $m_\ell^{p-1/2}$ peut facilement être inversée. On sait* en effet que

$$\sum_p {}^{(o)}M^{2p}_{2\ell+1}\; {}^{(o)}\gamma^{2q+1}_{2p} = \delta^{2q+1}_{2\ell+1} \qquad \text{où} \qquad {}^{(o)}M^{2p}_{2\ell+1} = \left[(2\ell+1)^2-(2p)^2\right]$$

---

* Les quantités ${}^{(o)}M$ et ${}^{(o)}\gamma$, le vecteur $\hat{v}^{(o)}$ sont identiques aux quantités $M^{(o)}$, $\gamma^{(o)}$, $\hat{v}^{(o)}$ de la section 1.2.

Par suite, si on veut résoudre

$$\sum_p m^p_{\ell+1/2} \ \eta^{q+1/2}_p = \delta^{q+1/2}_{\ell+1/2} = \delta^q_\ell$$ , il suffit de

prendre

$$\eta^{q+1/2}_p = \frac{1}{2} \gamma^{2q+1}_{2p} \qquad \text{(III.2.24)}$$

Le même raisonnement montre que le vecteur s de composantes

$$s_p = v^{(o)}_{2p} \qquad \text{(III.2.25)}$$

est annihilé par la matrice $m^p_{\ell+1/2}$.

On peut résoudre par itération le système d'équations (III.2.22) (III.2.23), de la manière suivante :

$$\text{tg } \delta_\ell \ \text{(III.2.22)} \rightarrow a_{p-1/2} \ \text{(III.2.23)} \rightarrow \text{tg } \delta_{p+1/2} \ \text{insertion (III.2.22)}$$

(III.2.26)

Chaque fois que l'on résoudra III.2.22, le vecteur $\hat{v}$ sera utilisé pour que $a_{-1/2}$ soit nul. Pour des tg $\delta_\ell$ suffisamment petits, il n'est pas difficile de voir que la chaine d'itérations converge, et conduit à un potentiel unique.

### 3.2.3 - Approximation de Born

Il est possible de développer la méthode donnée dans ce chapitre en se limitant à chaque pas au premier ordre d'un développement en séries des fonctions considérées. Les équations fondamentales deviendront ainsi simplement :

$$f(r,r') = \sum_\mu c_\mu \ u_\mu(r) \ u_\mu(r') \qquad \text{(III.2.27)}$$

$$K(r,r') \sim f(r,r') \qquad \text{(III.2.28)}$$

$$V(r) \sim -2r^{-1} \ \frac{d}{dr} \ r^{-1} \ f(r,r) \qquad \text{(III.2.29)}$$

Par ailleurs, si on multiplie les 2 membres de (III.2.3) par $e^{i(\pi\ \mu_o/2\ -\ \delta_{\mu_o})}$, et si on égale les parties réelles et imaginaires, on obtient les équations (exactes) suivantes :

$$\begin{cases} \sin \delta_{\mu_o} = - \sum_{\mu} L^{\mu}_{\mu_o}\ c_\mu\ A_\mu\ \sin \left[ \delta_\mu - \delta_{\mu_o} + \pi/2\ (\mu_o - \mu) \right] \\ A_{\mu_o} = 1 - \sum_{\mu} L^{\mu}_{\mu_o}\ c_\mu\ A_\mu \cos \left[ \delta_\mu - \delta_{\mu_o} + \pi/2\ (\mu_o - \mu) \right] \end{cases} \qquad \text{(III.2.30)}$$

dont l'approximation au ler ordre de l'ensemble des $\delta_\mu$ (c'est-à-dire que l'on suppose que <u>tous</u> ceux qui interviennent dans (III.2.30) sont suffisamment petits, et non pas seulement les déphasages physiques) peut s'écrire :

$$\begin{cases} \text{tg}\ \delta_{\mu_o} \sim - \sum_{\mu} L^{\mu}_{\mu_o}\ a_\mu\ \sin \frac{\pi}{2}\ (\mu_o - \mu) & \text{(a)} \\ A_{\mu_o} = 1 - \sum_{\mu} L^{\mu}_{\mu_o}\ a_\mu \cos \frac{\pi}{2}\ (\mu_o - \mu) & \text{(b)} \end{cases} \qquad \text{(III.2.31)}$$

où l'on a posé $$a_\mu = c_\mu\ A_\mu \cos \delta_\mu \sim c_\mu\ A_\mu \qquad \text{(III.2.32)}$$

L'équation (III.2.31a) peut être résolue en choisissant a priori les coefficients $a_\mu$ qui ne sont pas d'ordre entier. Cependant ce choix n'est pas arbitraire si l'on veut que l'approximation conserve un sens. Pour le voir, admettons que l'ensemble des déphasages physiques est de la forme $\lambda\ \delta^o_\ell$, où les $\delta^o_\ell$ sont bornés et où $\lambda$ peut être choisi arbitrairement petit. C'est seulement si, écrivant aussi ceux des coefficients $a_\mu$ qui sont choisis arbitrairement sous la forme $\lambda\ a^o_\mu$, nous faisons tendre $\lambda$ vers zéro, que l'approximation de Born a un sens et apparait comme une approximation linéaire en $\lambda$. En d'autres termes, les $a_\mu$ "arbitraires" doivent être suffisamment petits. Cette condition réalisée, on voit que ceux des $a_\mu$ qui sont calculés à partir des déphasages physiques sont d'ordre $\lambda$, de sorte que, dans cette approximation, l'équation (III.2.31b) se réduit simplement à $A_\mu = 1$. Naturellement, là où on introduit le vecteur $\hat{v}$ ou un vecteur analogue, c'est-à-dire annulé par la matrice fondamentale du problème (celle qui relie les déphasages physiques aux $c_\mu$ non arbitraires), il conviendra que le paramètre dont on l'affecte soit lui aussi de l'ordre de $\lambda$. Cette condition est obligatoirement réalisée pour les potentiels de Newton si on choisit le potentiel "spécial". Elle l'est aussi pour les potentiels pairs. La petitesse des $a_\mu$, donc des $c_\mu$, justifie l'approximation (III.2.28). En effet, les séries de Neuman convergent pour $\lambda$ suffisamment petits et conduisent à un développement en puissances de $\lambda$ dont le ler terme est (III.2.28).

L'approximation linéaire que nous venons de présenter est identique à l'habituelle approximation de Born. On sait que dans cette approximation le désaphage (ou sa tangente) est donné par la relation :

$$\operatorname{tg} \delta_\ell \sim \frac{\pi}{2} \int_o^\infty V(\rho)\ J_{\ell+1/2}(\rho)\ J_{\ell+1/2}(\rho)\ \rho\ d\rho \qquad \text{(III.2.33)}$$

Si on choisit $V(\rho)$ de la forme (III.2.29) et $f(\rho,\rho)$ de la forme (III.2.27) on obtient

$$\operatorname{tg} \delta_\ell \sim - \pi^2/2 \int_o^\infty J_{\ell+1/2}(\rho)\ J_{\ell'+1/2}(\rho)\ \frac{\partial}{\partial\rho} \sum_\mu c_\mu\ J_{\mu+1/2}(\rho)\ J_{\mu+1/2}(\rho)\ d\rho \qquad \text{(III.2.34)}$$

Le calcul des intégrales est effectué en appendice (A VII) et conduit à :

$$\operatorname{tg} \delta_\ell \sim - \sum_\mu \frac{\sin^2 \pi/2\ (\ell-\mu)}{(\ell+1/2)^2 - \mu^2}\ c_\mu \qquad \text{(III.2.35)}$$

qui est identique à (III.2.31a).

Ajoutons enfin qu'il est facile de vérifier que, calculés dans l'approximation de Born (c'est-à-dire par (III.2.28) les potentiels transparents donnent des déphasages physiques nuls dans l'approximation de Born (III.2.34). Les potentiels transparents sont donc transparents aussi dans l'approximation de Born.

## SECTION III - PROPRIETES DESCRIPTIVES DES POTENTIELS ET FONCTIONS DE JOST

### 3.3.1 - Propriétés asymptotiques des potentiels

Nous nous contenterons de les indiquer dans le cas simple où les $c_\mu$ comprennent les $c_\ell$, que l'on détermine à partir des déphasages, tandis que les autres $c_\mu$ sont bornés par $Cu^{-5/3-\varepsilon}$. Dans ce cas, on peut reprendre l'analyse donnée dans la section 1.3, et on voit que les fonctio f et g ont exactement le même comportement asymptotique que celles qui étaient introduites. Il en résulte que le terme dominant dans le comportement asymptotique du potentiel est le même, so

$$V(r) \sim -2\pi^{-1/2} (\alpha - \beta) r^{-3/2} \cos (2r - \pi/4) + O (r^{\varepsilon-2}) \qquad (III.3.1)$$

Il est intéressant de remarquer que l'on peut déduire du comportement asymptotique de la fonction $K(r,r)$ une règle des phases. On a en effet, de la définition de $V(r)$

$$\int_0^\infty r\, V(r)\, dr = -2 \lim_{r \to \infty} \left[ r^{-1} K(r,r) \right] \qquad (III.3.2)$$

Comme $K(r,r) \sim g(r,r) \sim \frac{\alpha + \beta}{2} r \left[ 1 + O (r^{-1/2}) \right]$ il vient

$$\int_0^\infty r\, V(r)\, dr = -(\alpha + \beta) \qquad (III.3.3)$$

où $\alpha$ est un paramètre arbitraire, et $\beta$ est déterminé par (I.3.58), (I.3.33) et (I.3.64). Dans l'approximation de Born, on a simplement

$$\beta \sim \beta_o = \sum_p \bar{\mu}_{2p} \operatorname{tg} \delta_{2p} \qquad (III.3.4)$$

### 3.3.2 - Propriétés des fonctions de Jost

Rappelons le développement (III.2.2.) :

$$\begin{cases} f_1(\nu) = e^{-\frac{i\pi\nu}{2}} - \sum_\mu \dfrac{\sin (\nu - \mu)\, \pi/2}{(\nu+1/2)^2-(\mu+1/2)^2}\; c_\mu A_\mu e^{i\delta_\mu} e^{-\frac{i\pi\mu}{2}} \\ f_2(\nu) = e^{\frac{i\pi\nu}{2}} - \sum_\mu \dfrac{\sin (\nu - \mu)\pi/2}{(\nu+1/2)^2-(\mu+1/2)^2}\; c_\mu A_\mu e^{-i\delta_\mu} e^{\frac{i\pi\mu}{2}} \end{cases} \qquad (III.3.5)$$

Les propriétés des fonctions de Jost sont évidentes sur ces relations. Ce sont en général des fonctions méromorphes, de pôles fixés aux valeurs de $\mu$. Il existe toutefois une exception remarquable : Pour $\mu$ demi entier (égal à $\ell + 1/2$) $L^{\mu}_{\nu}$ est une fonction entière. Si seuls ces $c_{\mu}$ sont admis (potentiel pair), la fonction de Jost est une fonction entière de $\nu$, d'ordre 1, de type fini égal à $\pi/2$. Il est possible de trouver pour cette fonction de Jost une formule d'interpolation en utilisant la formule de Lagrange Valiron, de même que Chadan [24] l'a fait dans le plan des énergies.

La position des zéros des fonctions de Jost dans le plan complexe des $\nu$ peut être étudiée de la même façon que pour celles des potentiels de Newton au chapitre II. Il existe toutefois une différence importante. Si l'on choisit de déterminer un ensemble de $c_{\mu}$ - par exemple les $c_{\ell}$, ou les $c_{\ell+1/2}$, à partir des $\delta_{\ell}$, et si l'on choisit arbitrairement les autres $c_{\mu}$, ce sont seulement les termes relatifs aux premiers que l'on pourra transformer de façon à obtenir des termes du même type mais où les coefficients se comportent asymptotiquement comme les $\delta_{\ell}$. Si les $\delta_{\ell}$ décroissent exponentiellement, les relations qu'on leur imposera pour éviter des zéros dans le 1er quartier dépendront des autres $c_{\mu}$ choisis, de sorte que d'autres solutions que la solution nulle apparaitront. En d'autres termes, les potentiels du type étudié contiennent certainement de bonnes superpositions de potentiels de Yukawa.

# DEUXIEME PARTIE

# APPROCHE SEMI-CLASSIQUE

# INTRODUCTION

Il résulte de l'étude faite dans la première partie de notre travail que le potentiel ne peut pas être complètement déterminé par une approche formelle. Dans la deuxième étape de la recherche, nous pouvons donc supposer a priori que le potentiel a une forme "raisonnable" : c'est-à-dire en accord avec les prévisions qu'on peut faire par ailleurs, et chercher si l'on peut construire un potentiel de ce type à partir des sections efficaces de diffusion élastique. Malheureusement, tout ce qu'on peut dire sur la forme du potentiel est assez vague, et dépend du problème considéré.

On peut trouver toutefois deux caractéristiques constantes, dont l'une est bien établie.

La première de ces caractéristiques est fondée surtout sur la confiance des physiciens en la continuité des propriétés de la matière : c'est la "douceur" de la forme du potentiel. Naturellement, nous voulons parler du potentiel hors le coeur dur, s'il y en a un, ou hors le voisinage de l'origine. En termes précis, on dira que le potentiel peut, au moins au-delà d'une valeur b de r, être lissé avec une très bonne précision par une fonction dont les 2 ou 3 première dérivées sont bornées.

La deuxième propriété est la régularité des queues de potentiel. Cette caractéristique est assez bien fondée théoriquement : on peut calculer en général le terme dominant dans la partie du potentiel qui correspond aux grandes valeurs de r. Par exemple, dans le problème de la diffusion nucléon-nucléon, ce terme est celui que donne l'échange d'un méson $\pi$, et donc un potentiel de Yukawa. Dans le modèle optique de la diffusion nucléon-noyau, le terme dominant de la queue du potentiel nucléaire est probablement aussi une exponentielle décroissante. Par contre, dans la diffusion entre deux atomes, le terme dominant est dû aux forces de Van der Waals, et décroit donc comme une puissance élevée de $r^{-1}$. Naturellement, il y aura lieu d'ajouter dans certains problèmes un potentiel en $r^{-1}$ décrivant l'interaction coulombienne.

Il est donc possible d'admettre a priori que, sauf coeur dur répulsif, la courbe qui représente le potentiel en fonction de la distance est une courbe rapidement décroissante et tendant vers zéro au-delà d'une certaine valeur a de r, la "portée" du potentiel, et dont les 2 ou 3

premières dérivées sont bornées. L'adjonction d'un potentiel coulombien introduira une divergence en $r^{-1}$ à l'origine et une queue en $r^{-1}$ qui oblige à un traitement spécial bien connu, mais les dérivées restent bornées à tous les ordres pour $r \neq 0$. Le coeur dur et le potentiel coulombien peuvent être considérés comme des traits particuliers qui se superposent au potentiel proprement dit, et introduisent des difficultés particulières, bien souvent séparables. On peut donc se limiter dans une première étude à un potentiel qui ne contient ni l'un ni l'autre.

Si l'on admet a priori que le potentiel présente les caractéristiques que nous avons indiquées, on peut penser que, lorsque la longueur d'onde $\lambda$ des particules incidentes est petite par rapport aux longueurs caractéristiques $L_i$ du potentiel, (c'est-à-dire V/V', V'/V", etc.), les approximations asymptotiques doivent permettre d'obtenir les déphasages avec une erreur relative qui tende vers zéro avec les paramètres asymptotiques $\lambda/L_i$. Il ne s'agit pas là d'une propriété particulière au problème considéré mais une propriété très générale, commune à l'ensemble des problèmes de diffraction. Les problèmes qui ont pu être traités de cette manière sont beaucoup trop nombreux pour pouvoir être énumérés ici [1]. Citons seulement d'une part, la diffusion de la lumière par les gouttes d'eau [2], sur laquelle sont construites certaines analogies que nous rencontrerons au chapitre I, d'autre part, la propagation de la lumière [3] dans un milieu d'indice variable, et celle des vagues [4] sur un fond de profondeur lentement variable, qui fournissent une image intuitive de la propagation des ondes sur un potentiel lentement variable. Il existe toutefois une différence de nature mathématique entre ces problèmes de diffraction et celui de la diffusion d'une particule par un potentiel. On part dans les premiers d'une équation de propagation bi ou tridimensionnelle très générale, par exemple l'équation de Helmholtz, et on décrit ensuite le problème par un ensemble de conditions aux limites. C'est leur nature qui fournit les longueurs caractéristiques - par exemple, le rayon de la goutte d'eau, ou bien la dénivellation du fond sur une longueur de vague. Au contraire le problème de la diffusion par un potentiel est un problème stationnaire de collision où l'équation fondamentale contient une fonction, le potentiel, qui joue le rôle des conditions aux limites trouvées ailleurs. D'autre part, chaque problème présente ses propres particularités (par exemple, si on étudiait la diffraction des vagues par un obstacle, la possibilité de phénomènes non linéaires - ici la possibilité de coeur dur, etc.), qui rendent délicates les analogies trop générales. Une étude comparée des problèmes de diffusion ou diffraction serait intéressante et difficile [5] et reste encore à faire. L'idée de construire des méthodes asymptotiques pour étudier la diffusion par un potentiel est très vieille, et dès 1926, Jeffreys, Wentzel, Kramers et Brillouin [6] donnaient une méthode de calcul du déphasage qui entre dans ce cadre. Au point de vue mathématique, cette méthode revient à l'évaluation asymptotique des solutions d'une équation linéaire du 2ème ordre quand un paramètre devient très grand. Elle est à cet égard encore plus ancienne puisque des travaux de ce

type avaient déjà été faits par Liouville et Green [7]. Une forme mathématique élaborée et rigoureuse a été donnée à la méthode par R.E. Langer [8], et, plus récemment, F.W.J. Olver [9]. De plus, tant au point de vue fondamental qu'au point de vue des applications, elle a fait l'objet d'un très grand nombre de publications, qu'il n'est pas question de passer en revue [10]. Remarquons toutefois que si, et à plusieurs reprises, on a montré que le déphasage obtenu pouvait être développé aux ordres supérieurs du paramètre asymptotique, c'est seulement tout récemment que Rosen et Yennie [11] d'une part, l'auteur [12] d'autre part, ont donné une forme simple du deuxième ordre du développement asymptotique du déphasage. La description du phénomène de diffusion dans le cas asymptotique exige, outre la connaissance des déphasages, celle d'un moyen d'évaluer asymptotiquement l'amplitude de diffusion, en sommant la série de Faxen-Holtzmark. L'idée de remplacer la sommation par une intégrale est certainement très vieille, et a permis par exemple d'évaluer asymptotiquement la diffusion coulombienne et montrer que le résultat obtenu [13] est égal au résultat exact ainsi qu'au résultat classique. Elle a permis aussi, dans le cas où un seul point de phase stationnaire existe, de montrer que la section efficace ainsi évaluée est identique à la section efficace classique. Mais ce cas est très particulier, et il est stupéfiant de constater que c'est seulement en 1959 que Ford et Wheeler [14] ont développé systématiquement la méthode dans le cas général. Cette méthode, exposée au chapitre I, est désignée en général sous le nom de théorie semi-classique de la diffusion.

La théorie semi-classique de la diffusion de Ford et Wheeler a été rapidement appliquée dans des domaines très variés, qu'ils avaient pour la plupart indiqués déjà dans leurs articles fondamentaux. Citons la chimie physique [15] (diffusion moléculaire), la physique nucléaire [16] (diffusion des $\alpha$ ou des ions lourds par les noyaux), la physique atomique [15] (diffusion des atomes). Elle y rencontra toutefois un succès inégal. Si elle est encore très employée en chimie physique et en physique atomique, elle semble par contre abandonnée en physique nucléaire. En effet les résultats expérimentaux [17], sauf dans le cas de collisions d'ions très lourds, présentent en général de fortes oscillations aux grands angles incompatibles avec les résultats de Ford et Wheeler. On sait que les sections efficaces de diffusion ont été interprétées de façon beaucoup plus raisonnable dans ce cas par des modèles dits "à couplage fort". Ces modèles reposent d'ailleurs sur un raisonnement semi-classique : on admet que les particules incidentes possèdent une trajectoire classique et qu'elles subissent une diffusion purement coulombienne si cette trajectoire ne touche pas le noyau. Si au contraire elle le touche, les particules sont complètement absorbées et disparaissent de la voie de diffusion élastique. Ainsi l'amplitude de diffusion s'écrit simplement :

$$f(\theta) = \sum_{\ell=\ell_0}^{\infty} (2\ell+1)\, e^{2i\,\delta_\ell}\, P_\ell(\cos\theta) - \sum_{0}^{\infty} (2\ell+1)\, P_\ell(\cos\theta)$$

où $\ell_o$ est le moment orbital de la lère onde partielle qui "rate" le noyau :

$$\ell_o (\ell_o + 1) = k^2 R^2 - 2 \frac{z_1 z_2 e^2}{\hbar v} k R$$

où R est le rayon du noyau, k le moment cinétique, v la vitesse de la particule, $z_1 e$ et $z_2 e$ les charges des particules incidentes et cibles.

Sous cette forme simple, l'amplitude de diffusion peut être calculée exactement [19], et possède des oscillations aux grands angles compatibles avec les résultats expérimentaux. Ces oscillations sont toutefois en général trop fortes [20]. Il est possible d'améliorer l'accord en faisant une coupure plus graduelle au voisinage de $\ell_o$. On obtient ainsi un modèle parfaitement phénoménologique, dont Frahn et Venter [21] ont donné une forme très élaborée, et qui est de plus en plus utilisé. Dans ce modèle, la notion de potentiel devient superflue. Toutefois, il convient de remarquer que le modèle optique a été utilisé avec succès lui aussi pour étudier la diffusion des ions lourds par les noyaux, avec des formes d'absorption variées. Les résultats des calculs ne sont sensibles qu'à la forme du potentiel dans la surface du noyau, les ondes incidentes étant fortement absorbées à l'intérieur.

On peut se demander si l'échec de la méthode de Ford et Wheeler dans certaines de ses applications provient de l'impossibilité d'utiliser un potentiel dans ces problèmes ou du caractère asymptotique de la méthode. Il est en effet hors de doute que la notion de potentiel manque de bases théoriques quand elle est utilisée dans des situations dont une forte absorption est le caractère dominant. Néanmoins le succès [22] du modèle optique dans certains de ces problèmes prouve que, considéré comme un outil phénoménologique, le potentiel peut être utilisé concurremment au modèle à couplage fort. La méthode de Ford et Wheeler est donc certainement elle-même en défaut dans les conditions où elle a été utilisée. Il est facile de voir deux raisons possibles de cet échec. L'une est que les longueurs d'onde ne sont pas assez courtes - ce fait est corroboré par le succès de la méthode pour décrire des collisions entre ions très lourds. L'autre est l'absence de l'absorption dans la méthode [23].

Dans les conditions où les méthodes asymptotiques sont valables, qui sont aussi les conditions où un grand nombre de valeurs des déphasages sont connues avec précision, on peut espérer que le problème inverse sera facile à résoudre. Ce problème a en effet, en mécanique classique, et pour un potentiel répulsif au moins, une solution et une seule. Il est remarquable que dans le ler travail connu sur le problème inverse à énergie fixée, l'unicité du potentiel construit à partir de l'ensemble des déphasages est démontrée dans le cadre de la méthode JWKB [24].

Toutefois, ceci suppose que les déphasages soient connus pour les valeurs continues de $\ell$, et l'interpolation n'a aucune raison d'être unique. Le problème peut être posé autrement : étant donné une section efficace, et en considérant comme valable l'ensemble de la théorie semi-classique, est-il possible de construire le potentiel. C'est sous cette forme que nous tenterons d'étudier ce problème. Toutefois, cela ne saurait être le but unique de ce travail. En effet, il est aussi important, pour l'étude du problème inverse, d'obtenir des lois générales sur les sections efficaces qui permettent de savoir si l'on a des chances d'obtenir la forme du potentiel dans tel ou tel domaine. Il est important aussi d'examiner la validité de certaines lois empiriques pour savoir si elles sont ou non reliées à la forme du potentiel. Il est important enfin de conduire ces "études directes" de façon rigoureuse, c'est-à-dire en majorant ou en évaluant les erreurs effectuées, si l'on veut en tirer une information utile pour le problème inverse.

La présente étude est divisée en 3 chapitres. Nous rappelons rapidement dans le premier la théorie semi-classique de la diffusion, en nous limitant aux parties qui nous intéressent le plus.

Dans le second chapitre, nous tentons de donner une forme plus rigoureuse et plus complète de la théorie semi-classique de la diffusion, qui permette l'étude du problème inverse. Nous étudions pour simplifier le cas d'un potentiel monotone, dans un domaine d'énergie où il existe un seul point tournant. Ce domaine s'étend en énergie des valeurs les plus élevées jusqu'à l'énergie critique, à laquelle apparait un point tournant d'ordre 3. L'étude reprend pas à pas les approximations de la théorie semi-classique. A chaque pas, les ordres supérieurs ou les erreurs sont évaluées. Des approximations supplémentaires permettent de tenir compte sans complication de l'absorption et du potentiel spin orbite.

Les résultats sont les suivants :

1) La méthode semi-classique est bien une méthode asymptotique dont le paramètre fondamental $(ka)^{-1}$ est le rapport de la longueur d'onde $k^{-1}$ à la portée a du potentiel.

2) En physique nucléaire, des valeurs courantes de ka sont de l'ordre de la dizaine. Dans ces conditions, les erreurs les plus importantes de la théorie semi-classique viennent de l'évaluation de l'amplitude de diffusion par la méthode de la phase stationnaire. L'erreur est en effet d'ordre $(ka)^{-1/2}$. La prise en compte du terme correspondant doit permettre d'améliorer nettement les résultats. Elle peut se faire simplement. Au contraire il est difficile de calculer le terme en $(ka)^{-1}$.

3) Les erreurs sur le déphasage ne cessent d'être négligeables que quand on approche du point critique. Au voisinage du point critique, le passage d'un point tournant d'ordre 1 à un point tournant d'ordre 3 introduit des difficultés importantes dans la justification de l'approximation JWKB. La correction au déphasage est importante, et se traduit par des oscillations pour les grandes valeurs de l'angle de diffusion.

4) Les erreurs dues à la transformation de la somme discrète sont négligeables dans les conditions où le déphasage JWKB est une bonne approximation. Elles sont faibles même au voisinage du point critique. Un très bon test pour leur validité réside dans le rapport $|f(\pi)|/|f(o)|$ . Une majoration des erreurs tend vers zéro avec ce rapport.

5) Aux grands angles, le terme dominant peut provenir de corrections très faibles aux déphasages JWKB.

Au chapitre 3, nous donnons 3 applications de la méthode semi-classique. La première concerne le problème inverse - nous tentons de répondre aux questions posées plus haut.

La seconde traite des oscillations dans les distributions angulaires $d\sigma/d\theta$ et de la polarisation. Pour un potentiel spin orbite réel et petit, et dans le domaine de validité de notre méthode nous démontrons la loi de Rodberg.

Dans la troisième application, nous justifions la méthode du couplage fort en présence de forte absorption et au dessous du point critique.

Enfin, nous indiquerons très sommairement d'autres applications.

# CHAPITRE IV

## LA THEORIE SEMI-CLASSIQUE DE LA DIFFUSION *

*Ergo Iris croceis per caelum roscida pennis*
*Mille trahens varios adverso sole colores*
*Devolat ...*

*Virgile Aen IV 700*

Après avoir rappelé la théorie classique de la diffusion d'une particule par un potentiel, nous exposons rapidement la théorie semi-classique de Ford et Wheeler [14]. Dans cette théorie, le rôle de la fonction de déflexion est tenu par la dérivée du déphasage par rapport à $\ell$. Les points de phase stationnaire sont ceux où la fonction de déflexion est égale à l'angle d'observation. Quand cette fonction varie de façon monotone, il y a un seul point de phase stationnaire et la section efficace de diffusion classique est égale à la section efficace de diffusion quantique. Quand elle passe par un extremum, loin de l'extremum, les contributions des deux branches interfèrent, phénomène qui n'existe pas dans le traitement classique. Au voisinage de l'extremum l'interférence des deux branches conduit à un phénomène spécial analogue à un arc-en-ciel. Une singularité logarithmique dans la fonction de déflexion conduit à un phénomène analogue à la capture sur orbite - c'est la diffusion spirale - Enfin, si la fonction de déflexion s'annule, on a, à l'angle 0 ou à l'angle $\pi$, un phénomène analogue au halo.

### 4.1 - Les sections efficaces de diffusion classique

#### 4.1.1 - Définition et calcul de la section efficace différentielle

On sait [25] que la section efficace différentielle de diffusion est définie en mécanique

* Ce court chapitre contient uniquement un rappel de résultats connus, exposés ici pour faciter la compréhension des chapitres suivants.

classique par la formule suivante :

$$\sigma(\Omega)\, d\Omega = \frac{\text{Nb de particules diffusées dans } d\Omega \text{ par unité de temps}}{\text{Intensité incidente}} \qquad (IV.1.1)$$

Désignons par I la densité du faisceau de particules incidentes, par $\Theta$ l'angle d'observation (nous supposerons le centre diffuseur sphérique, de sorte que le problème de diffusion ait la symétrie cylindrique), et par $b_i$ les valeurs des paramètres d'impact des particules qui diffusent dans l'angle $\Theta$. Nous pouvons écrire :

$$I \sum_i 2\pi\, b_i\, \Delta\, b_i = 2\pi\, I\, \sigma(\Theta)\, \sin\Theta\, \Delta\Theta \qquad (IV.1.2)$$

où les $\Delta\, b_i$ et $\Delta\Theta$ sont des valeurs absolues. Il résulte de (IV.1.2) que la section efficace différentielle est donnée par :

$$\sigma(\Theta) = \sum_i \frac{b_i}{\sin\Theta} \left| \frac{db_i}{d\,\Theta} \right| \qquad (IV.1.3)$$

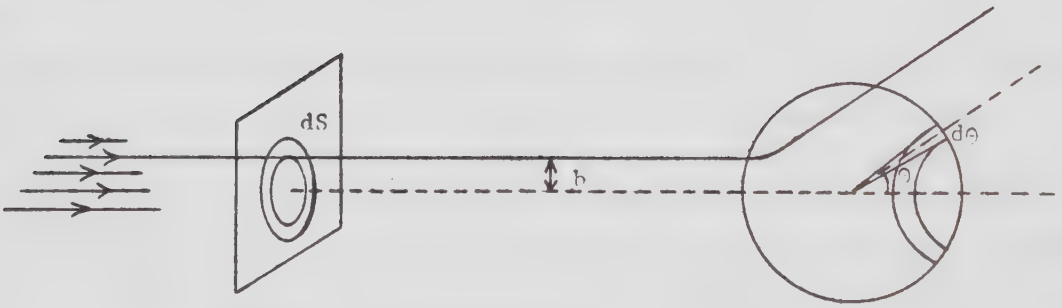


FIGURE I

4.1.2 - Mouvement dans un champ central

Le principe de conservation du moment montre que le mouvement est plan et permet d'écrire, avec le principe de conservation de l'énergie, les relations suivantes :

$$\begin{cases} L = m\, r^2\, \dot{\chi} & \text{(IV.1.4)} \\ \dot{r} = \dfrac{dr}{dt} = \left[ \dfrac{2}{m} \left(E - V(r)\right) - L^2/m^2 r^2 \right]^{1/2} & \text{(IV.1.5)} \end{cases}$$

où $\chi$ est l'angle polaire, r la distance au centre diffuseur, E l'énergie, V le potentiel, L le moment de la particule diffusée. Ces deux relations permettent d'obtenir l'angle polaire en fonction de r :

$$\chi = \int \frac{dr\, L/r^2}{\sqrt{2m\left[E - V(r)\right] - L^2/r^2}} + cte \qquad \text{(IV.1.6)}$$

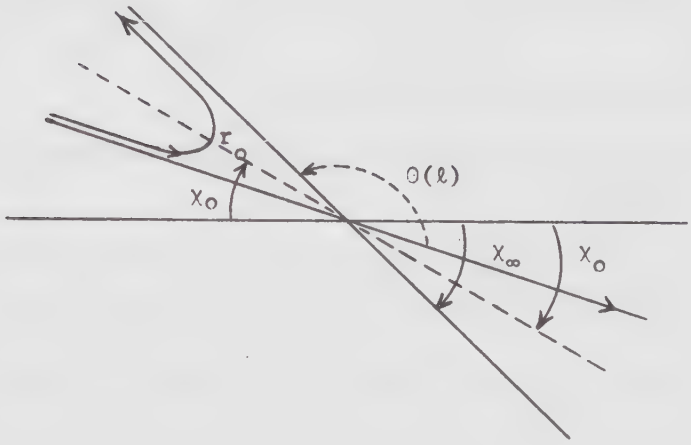


FIGURE 2

Posons $L = \hbar\,(\ell+1/2)$ , $2m\,E/\hbar^2 = k^2$ , $2m\,V/\hbar^2 = U$, nous pouvons écrire :

$$\chi(r) = \chi_o - \frac{d}{d\ell} \int_{r_o}^{r} \left[k^2 - U(r) - (\ell+1/2)^2/r^2\right]^{1/2} dr \qquad \text{(IV.1.7)}$$

tandis que l'angle de déflexion est égal à :

$$|\Theta(\ell)| = \begin{cases} \pi - 2(\chi_\infty - \chi_o) & \text{si } \chi_\infty - \chi_o < \pi/2 \\ 2(\chi_\infty - \chi_o) - \pi & \text{si } \chi_\infty - \chi_o > \pi/2 \end{cases}$$

$$= \pm \left\{ \pi + 2 \frac{d}{d\ell} \int_{r_o}^{\infty} \left[k^2 - U(r) - (\ell+1/2)^2/\, r^2\right]^{1/2} dr \right\} \qquad \text{(IV.1.8)}$$

Posons :

$$2\,\delta(\ell) = \pm \left\{ (\ell+1/2)\pi + 2\int_{r_o}^{\infty} \left[ k^2 - U(r) - \frac{(\ell+1/2)^2}{r^2} \right]^{1/2} dr \right\} \qquad \text{(IV.1.9)}$$

On voit que la mécanique classique est caractérisée par les relations suivantes :

$$\begin{cases} |\theta(\ell)| = \left| 2\,\dfrac{d\delta}{d\ell} \right| \\ \dfrac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} = (\sin\theta)^{-1} \sum_i \ell_i \left| \dfrac{d\theta}{d\ell_i} \right|^{-1} \end{cases} \qquad \text{(IV.1.10)}$$

où l'on a remplacé le paramètre d'impact par sa valeur $r_o(U=o)$ soit $(\ell+1/2)k^{-1}$

4.2 - Théorie semi-classique de la diffusion [26]

L'expression quantique de la section efficace différentielle de diffusion dans l'angle solide unité à $\theta$ est donnée par :

$$\frac{d\sigma_{qu}}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \qquad \text{(IV.2.1)}$$

où l'amplitude de diffusion $f(\theta)$ est donnée par le développement de Faxen-Holtzmark :

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{\ell=o}^{\infty} (2\ell+1)(e^{2i\delta_\ell} - 1)\, P_\ell(\cos\theta) \qquad \text{(IV.2.2)}$$

où $\delta_\ell$ est le déphasage de l'onde partielle d'ordre $\ell$. La théorie semi-classique est définie par l'ensemble d'approximations suivant :

1) Le déphasage est donné par la méthode JWKB

2) Les pôlynomes de Legendre sont remplacés par une forme asymptotique :

pour $\sin\theta \gtrsim \ell^{-1}$ $\quad P_\ell(\cos\theta) = \left[ 1/2(\ell+1/2)\,\pi\,\sin\theta \right]^{-1/2} \sin\left[ (\ell+1/2)\,\theta + \pi/4 \right]$ (IV.2.3)

pour $\sin\theta \lesssim \ell^{-1}$ $\quad P_\ell(\cos\theta) = (\cos\theta)^{\ell}\, J_o\,(\ell+1/2)\,\theta$ (IV.2.4)

3) La sommation discrète est remplacée par une intégrale. Alors, pour les angles qui ne sont pas trop voisins de 0 ou de $\pi$, on obtient l'expression approchée :

$$f \sim -k^{-1} (2\pi\sin\theta)^{-1/2} \int_0^\infty (\ell+1/2)^{1/2} \left[ e^{i\phi_+} - e^{i\phi_-} \right] d\ell \qquad (IV.2.5)$$

où les phases $\phi_\pm$ sont définies sont définies par la formule :

$$\phi_\pm = 2\delta_\ell \pm (\ell+1/2)\,\theta \pm \pi/4 \qquad (IV.2.6)$$

et la somme $\sum (2\ell+1)\, P_\ell$ , égale à une fonction presque partout nulle, a été remplacée par 0. On utilisera souvent dans la suite les notations simplificatrices :

$$\ell + 1/2 = p \quad ; \quad \lambda\!\!\!^{-} = k^{-1} \qquad (IV.2.7)$$

4) L'intégrale est évaluée par une méthode asymptotique.

Dans les conditions précitées ($\sin\theta >> \ell^{-1}$), cette méthode est celle de la phase stationnaire, à un ordre quelconque. Les points de phase stationnaire sont solutions de l'équation stationnaire :

$$\frac{d\phi^\pm}{dp} = 0 = 2\frac{d\delta}{dp} \pm \theta \qquad (IV.2.8)$$

L'approximation JWKB pour les déphasages est identique à(IV.1.9), de sorte que pour($\ell$+1/2) et E donnés, l'angle stationnaire est identique à l'angle de diffusion classique. Dans la suite on notera $\Theta(\ell)$ ou $\Theta(p)$ la fonction de déflexion :

$$\Theta(p) = 2\frac{d\delta}{dp} \qquad (IV.2.9)$$

Cette fonction a des allures variées suivant le potentiel. Pour un potentiel coulombien, elle est monotone, positive ou négative suivant que le potentiel est répulsif ou attractif, et varie de $\pi$ ou $-\pi$ à 0. Mais le potentiel coulombien est le seul potentiel attractif connu pour lequel $\Theta(p)$ est monotone. Pour un potentiel comme ceux utilisés en physique nucléaire (par exemple une forme gaussienne centrée sur l'origine), la fonction de déflexion est nulle à l'origine, nulle à l'infini et passe par un minimum.

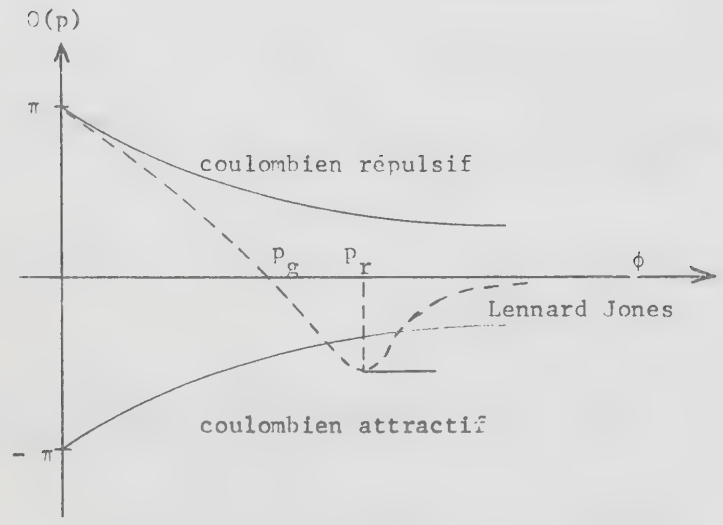


FIGURE 3

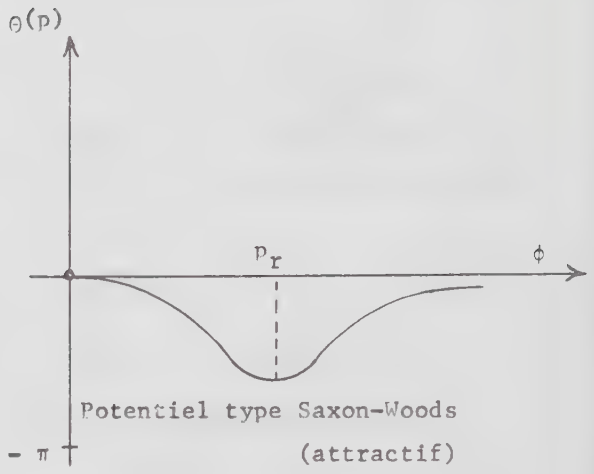


FIGURE 4

En un point de phase stationnaire, on peut remplacer le déphasage $\delta_\ell$ par la parabole osculatrice :

$$f_S \sim -\varepsilon_1 \frac{\hbar}{} (2\pi \sin\theta)^{-1/2} p_s^{1/2} \int e^{i\left\{\Phi(p_s) + \varepsilon_2 \left|\frac{d^2\Phi_s}{dp^2}\right| \frac{(p-p_s)^2}{2}\right\}} \quad \text{(IV.2.10)}$$

où $\varepsilon_1$ est le signe de la dérivée de $\Phi$, $\varepsilon_2$ le signe de sa dérivée seconde.

L'évaluation de (IV.2.10) est immédiate et conduit à l'amplitude de diffusion et à la section efficace quand il n'y a qu'un point de phase stationnaire :

$$f_s \sim -\varepsilon_1 \frac{\hbar}{} \left[\frac{p_s}{\sin\theta \left|\Phi''(p_s)\right|}\right]^{1/2} \exp\left\{i\,\Phi\,(p_s) + i\,\varepsilon_2\ \pi/4\right\} \quad \text{(IV.2.11)}$$

$$\left(\frac{d\sigma_{sc}}{d\Omega}\right)_\theta \sim \frac{\hbar^2\, p(\theta)}{\sin\theta \left|\phi''\,(p(\theta))\right|} = \frac{\hbar^2\, p(\theta)}{\sin(|\theta|)\left|\frac{d\theta}{dp}\right|} \quad \text{(IV.2.12)}$$

Elle est égale à la section efficace classique.

Toutefois le cas où il n'existe qu'un point de phase stationnaire est l'exception, et le mérite principal de la théorie semi-classique est de traiter les autres cas rencontrés. Nous allons les passer en revue.

### 4.2.1 - Interférences simples

Quand la fonction de déflexion présente deux (ou plusieurs branches) et que les points qui correspondent à la valeur de θ considérée (Figure 5) sont tous des points de phase stationnaire d'ordre 2 (c'est-à-dire où on peut évaluer l'intégrale sous la forme de Fresnel), la section efficace semi-classique est donnée par la relation

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left| \left( \frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} \right)_1^{1/2} + \left( \frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} \right)_2^{1/2} e^{i(\beta_2 - \beta_1)} \right|^2 \qquad \text{(IV.2.13)}$$

où $\left(\frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega}\right)_{1,2}$ sont les fonctions efficaces classiques qui correspondent aux 2 branches de l'amplitude de diffusion, $\beta_1$ et $\beta_2$ les phases des amplitudes de diffusion correspondantes (cf. formule (IV.2.11)). La section efficace classique dans les mêmes conditions est seulement :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} \right)_1 + \left( \frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} \right)_2 \qquad \text{(IV.2.14)}$$

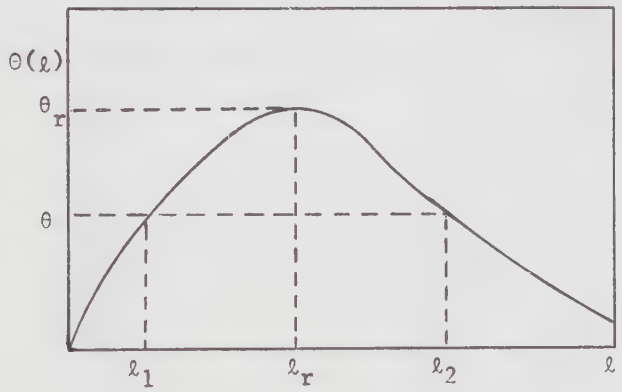


FIGURE 5

La fonction de déflexion classique Θ(ℓ) en fonction du moment angulaire. A l'angle de diffusion θ, les contributions à la diffusion viennent de $\ell_1$ et $\ell_2$, et conduisent à des effets d'interférence dans la section efficace semi-classique. Quand $\ell_1$ et $\ell_2$ atteignent la valeur commune $\ell_r$, le phénomène de diffusion arc-en-ciel s'observe à l'angle $\theta_r$.

### 4.2.2 - Diffusion arc-en-ciel

Lorsque Θ(p) possède un extremum continu (Figure 5), où sa dérivée est nulle, on obtient un phénomène particulier, que Ford et Wheeler ont décrit sous le nom de diffusion arc-en-ciel,

par analogie avec le même phénomène en optique dans la diffusion de la lumière par les gouttes d'eau (Figure 6). La description de ce phénomène est très simple en mécanique classique (ou en optique géométrique) : si $\theta_r$ est l'angle arc-en-ciel, $\ell_r$ la valeur de $\ell$ correspondante, on peut écrire :

$$\Theta(\ell) = \pm\, \theta_r + q(\ell-\ell_r)^2 \qquad \text{(IV.2.15)}$$

et

$$\sigma_{cl} = \frac{\pi^2(\ell_r+1/2)}{\sin\ \theta_r} \left| q\ (\theta_r - \theta)\right|^{-1/2} \qquad \text{(IV.2.16)}$$

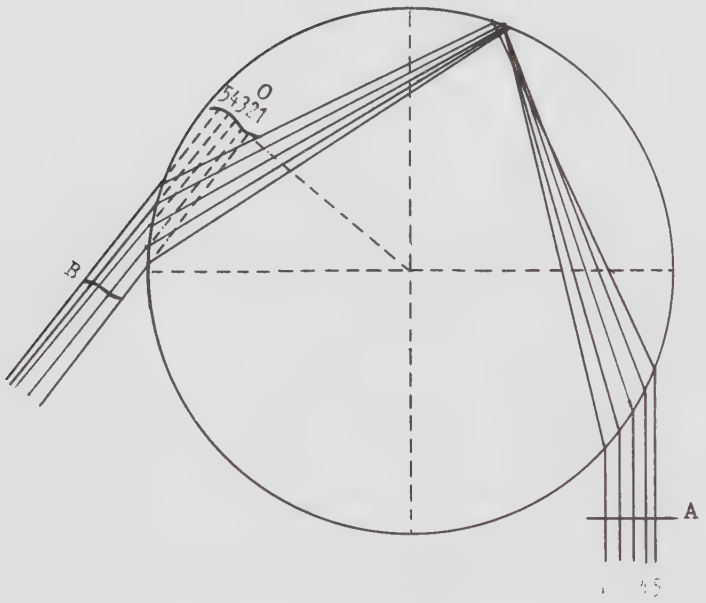


FIGURE 6

L'arc-en-ciel en optique géométrique - Les rayons lumineux qui correspondent à l'arc-en-ciel d'ordre 1 sont tracés à l'échelle. On observe le plan d'onde cubique en O, qui correspond à un maximum de déflexion. Presque toute la lumière qui a subi une réflexion dans la goutte d'eau ressort dans cette direction privilégiée, qui dépend, via l'indice, de la longueur d'onde. De là viennent les franges colorées.

Dans le cas quantique, on remplace le déphasage fonction de $\ell$ par un développement du 3ème ordre au voisinage de $\ell_r$ . On obtient alors :

$$\left(\frac{d\sigma_{sc}}{d\Omega}\right)_{\theta} \sim \lambda^2 \ (\ell_r+1/2) \ (2\pi/\sin\theta) \ |q^{-2/3}| \ Ai^2(x) \qquad (IV.2.17)$$

où
$$x = q^{-1/3} \ (\theta_r - \theta) \qquad (IV.2.18)$$

et
$$Ai(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(xu+1/3\ u^3)} \ du \qquad (IV.2.19)$$

L'allure de Aix est donnée par les formules approchées suivantes :

$$Ai\ (x) \to cte \qquad |x| \to 0 \qquad (IV.2.20)$$

$$Ai\ (x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} \frac{\cos\ 2/3(-x)^{3/2} - \pi/4}{\pi^{1/2}\ (-x)^{1/4}} \qquad (IV.2.21)$$

$$Ai\ (x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} (2\pi^{1/2}\ x^{1/4})^{-1}\ e^{-2/3\ x^{2/3}} \qquad (IV.2.21)$$

Si on calcule la valeur moyenne sur le côté brillant, on trouve la valeur classique (il suffit de remplacer cosinus par 1/2). Par contre, sur le côté sombre, on observe une décroissance exponentielle au lieu de zéro identiquement (Figure 7).

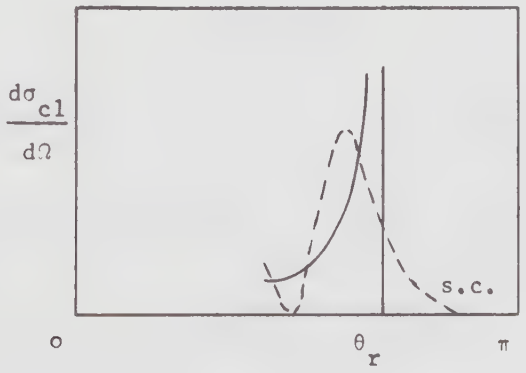


FIGURE 7

Section efficace de diffusion classique et semi-classique en fonction de l'angle θ près de l'angle arc-en-ciel $\theta_r$ (et en l'absence d'absorption). La région "éclairée" et la région obscure sont délimitées clairement dans la section efficace classique (en trait plein).

Effet de Halo

L'effet de halo (Figure 8) correspond au cas où sin $\Theta$ s'annule pour une valeur de $\ell$ différente de 0 ou de $\infty$. Cet effet peut se produire vers l'avant ($\Theta = 0$) ou vers l'arrière ($\Theta = \pi$). Nous ne considèrerons que le second cas. On peut écrire, en utilisant l'indice g pour les quantités relatives au halo.

$$\Theta(p) = \pi + a\,(p - p_g) \qquad \text{(IV.2.22)}$$

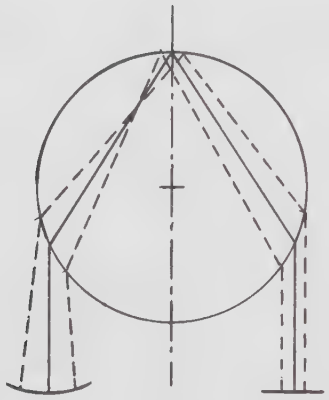

FIGURE 8

Diagramme schématique de l'effet de halo en optique géométrique. La figure entière est de révolution autour de l'axe.

La section efficace de diffusion classique est simplement donnée par :

$$\frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} \sim 2\,\frac{\lambda^2\,\ell_g}{|a|(\pi - \theta)} \qquad \text{(IV.2.23)}$$

Pour obtenir la section efficace de diffusion semi-classique, on développe de nouveau le déphasage au voisinage de $\ell_g$ :

$$\delta(p) = \delta(p_g) + \pi/2\,(\ell - \ell_g) + a/4\,(p - p_g)^2 \qquad \text{(IV.2.24)}$$

et on utilise la formule approchée suivante pour les polynômes de Legendre au voisinage de $\theta=\pi$.

$$P_\ell(\cos\theta) \sim (\cos\theta)^\ell \; J_o(p\theta) \qquad \text{(IV.2.25)}$$

En admettant que l'on peut remplacer la sommation par une intégration, on obtient la section efficace de diffusion au halo (Figure 9) :

$$\left(\frac{d\sigma_{sc}}{d\Omega}\right)_\theta \sim \lambda\!\!\!^{-2}(\ell_g + 1/2)^2 \; \frac{2\pi}{|a|} \; J_o^2 \; (\ell_g \sin\theta) \qquad \text{(IV.2.26)}$$

$$\xrightarrow[\theta \to \pi]{} \lambda\!\!\!^{-2} \; (\ell_g + 1/2) \; 2\pi/|a|$$

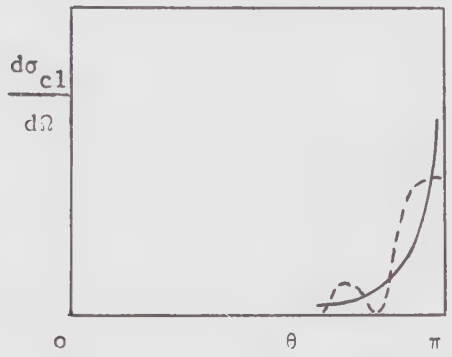


FIGURE 9

Diffusions classique et semi-classique pour un halo vers l'arrière ($\theta = \pi$). La section efficace classique est en traits pleins.

Ainsi la singularité classique est remplacée par un pic fini. De plus, comme $\langle J_o^2(z)\rangle = (\pi z)^{-1}$ la valeur moyenne de la section efficace semi-classique est identique au résultat classique :

$$\left\langle \frac{d\sigma_{sc}}{d\Omega} \right\rangle \sim \lambda\!\!\!^{-2} \; \ell_g \; 2/|a| \; \frac{1}{\pi - \theta} \qquad \text{(IV.2.27)}$$

Diffusion spirale

Les effets arc-en-ciel ou les effet de halo se produisent quand la fonction de déflexion possède des maxima ou des minima relatifs, ou bien passe par la valeur 0 (ou $\pi$) avec une pente finie. Il peut arriver en outre que la fonction de déflexion ait une singularité à une certaine

valeur critique, $\ell_1$, qui correspond à une trajectoire en forme de spirale infinie vers une orbite circulaire. La diffusion spirale intervient quand le potentiel effectif (Figure 10) possède un maximum relatif égal à l'énergie de la particule incidente, pour une certaine valeur $\ell_1$ du moment angulaire :

$$\begin{cases} \left(\frac{d\, U_{eff}}{dr}\right)(r_1,\ell_1) = 0 \\ U_{eff}\,(r_1,\ell_1) = k^2 \end{cases} \qquad \text{(IV.2.28)}$$

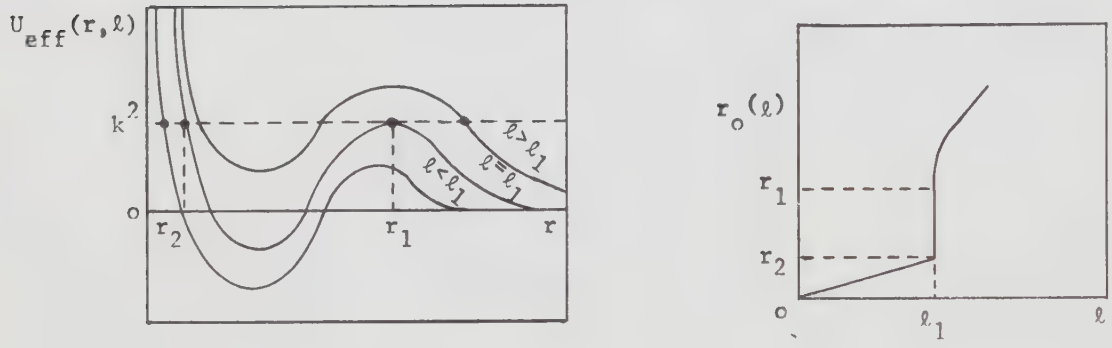


FIGURE 10

Le potentiel effectif Ueff (r,ℓ) fonction de r pour différentes valeurs du moment angulaire ℓ.Le moment angulaire $\ell_1$ caractéristique de la diffusion spirale est indiqué ainsi que les points tournants correspondants $r_1$ et $r_2$. A droite, on a représenté la courbe des variations du point tournant le plus extérieur, - le seul qui intervient dans les expressions classiques - avec ℓ.

Si on suit la valeur du point tournant classique sur la figure (10), on voit que pour $\ell > \ell_1$, r est supérieur à $r_1$, tandis que pour $\ell < \ell_1$, r est inférieur à $r_2$. Le point tournant classique est donc discontinu en passant par $r_1$. Pour obtenir la fonction de déflexion, nous devons calculer :

$$\chi_\infty - \chi_o = \int_{r_o\,(\ell)}^{\infty} \frac{\ell\, dr'}{r'^2\left[k^2 - U_{eff}(r',\ell)\right]^{1/2}} \qquad \text{(IV.2.29)}$$

où $r_o$ est un zéro du dénominateur. Cette intégrale est singulière pour $\ell = \ell_1$. Pour l'évaluer au voisinage de $\ell = \ell_1$, nous distinguerons les cas $\ell > \ell_1$ et $\ell < \ell_1$ :

$\underline{\ell > \ell_1}$ - On sait que si $r_o$ et $\ell$ sont liés par une relation du type $F(r_o,\ell) = 0$, on a

$$\frac{dr_o}{d\ell} = - \frac{\partial F}{\partial \ell} \Big/ \frac{\partial F}{\partial r_o}$$

Par suite, si on se reporte à (IV.2.28), on voit qu'on peut écrire :

$$\ell(r_o) = \ell_1 + \frac{(r_o - r_1)^2}{2} \ell''(r_1)$$

$$\rightarrow \quad r_o(\ell) = r_1 + \left[ 2 (\ell - \ell_1) / |\ell''(r_1)| \right]^{1/2} \qquad \text{(IV.2.30)}$$

D'autre part, on peut écrire approximativement pour $r \sim r_1^+$

$$k^2 - U_{eff}(r,\ell) \underset{\ell \to \ell_1^+}{\sim} -1/2\, U''_{eff}(r_1, \ell_1)(r - r_1)^2 \qquad \text{(IV.2.31)}$$

où U est dérivée par rapport à r.

En reportant (IV.2.30) et (IV.2.31) dans (4.2.29) , on trouve le comportement de $\Theta(\ell)$ au voisinage de $\ell_1$ (Figure 11)

$$\Theta(\ell) \sim - \Theta_1 - b \operatorname{Log} \frac{\ell_1}{\ell - \ell_1} \qquad \text{(IV.2.32)}$$

où $\Theta$ est donnée par une relation compliquée [16], tandis que :

$$b = \left[ 2 \frac{\ell_1}{r_1^2} / - r_1^2 \, U''_{eff}(r_1, \ell_1) \right]^{1/2} \qquad \text{(IV.2.33)}$$

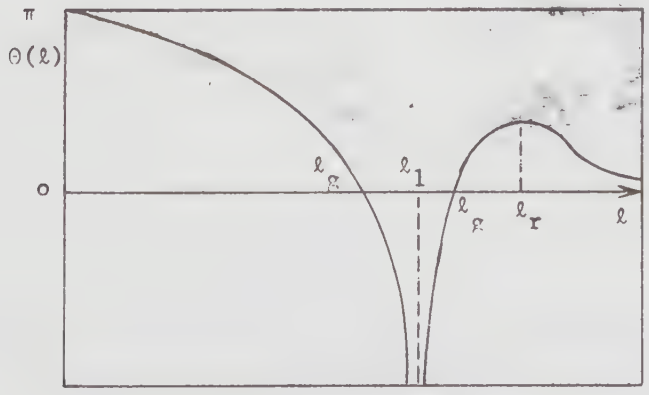


FIGURE 11

Fonction de déflexion classique $\Theta(\ell)$ en fonction du moment angulaire pour un potentiel répulsif
On observe une singularité logarithmique au voisinage de $\ell_1$.

$\underline{\ell < \ell_1}$ - En procédant de façon analogue, on obtient :

$$\Theta(\ell) \sim \Theta_2 - 2\,b\ \mathrm{Log}\ \frac{\ell_1}{\ell_1 - \ell} \qquad \text{(IV.2.34)}$$

où b est toujours donné par ( IV.2.33).

Une étude plus complète des phénomènes quantiques au voisinage du maximum d'une barrière de potentiel a été faite par Ford, Hill, Wakano et Wheeler [28] qui ont montré que la variation de $\Theta(\ell)$ au voisinage de $\ell_1$ se réduit à un pic fini, et, de plus, des pointes très étroites en fonction $\delta$, qui correspondent à des sauts de $2\pi$ du déphasage (cf. Figure 12). Nous verrons plus loin que ces discontinuités n'ont aucune importance.

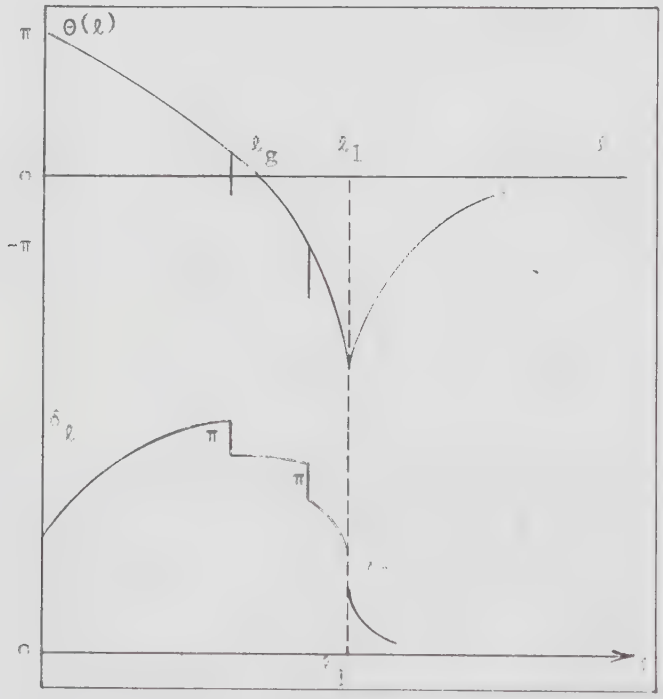


FIGURE 12

Fonction de déflexion et déphasage dans la diffusion spirale. Les discontinuités correspondent aux niveaux résonants dans la barrière de potentiel. Ce sont les phénomènes quantiques, étudiés par Ford et Wheeler, qui rendent finie l'amplitude du pic de $\Theta(\ell)$.

Nous donnerons seulement la section efficace de diffusion classique. Elle s'obtient en sommant un grand nombre de contributions venant des intervalles $\Theta = 0$ à $-\pi$, $\Theta = -\pi$ à $-2\pi$, etc. - Ces contributions sont de plus en plus petites. En se contentant de celle qui vient du 1er intervalle, on écrira :

$$\frac{d\Theta}{d\ell} = \begin{cases} -2b / (\ell_1 - \ell) & \ell < \ell_1 \\ b / (\ell - \ell_1) & \ell > \ell_1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\frac{2b}{\ell_1} \exp -(\Theta + \Theta_2) / 2b & \ell < \ell_1 \\ \frac{b}{\ell_1} \exp -(\Theta + \Theta_1) / b & \ell > \ell_1 \end{cases}$$

et donc

$$\frac{d\sigma_{cl}}{d\Omega} \sim \star^2 (\ell_1 + 1/2)^2 \frac{1}{b \sin\theta} \left\{ \exp\left[-\frac{\theta + \theta_1}{b}\right] + 1/2 \exp\left[-\frac{\theta + \theta_2}{b}\right] \right\}$$

Il n'y a pas de théorie semi-classique à la fois simple et générale de la diffusion spirale mais seulement des études particulières.

# CHAPITRE V

## THEORIE ASYMPTOTIQUE DE LA DIFFUSION

*In cauda venenum . . . . .*

### INTRODUCTION

Pour pouvoir étudier le problème inverse, dans le cadre de la théorie semi-classique, il est nécessaire de traiter celle-ci rigoureusement, donc de définir et d'évaluer les erreurs qu'elle introduit. D'autre part, pour pouvoir prévoir les allures des sections efficaces et leur relation avec la forme du potentiel, il est nécessaire d'étendre la théorie de façon à tenir compte de l'absorption et du potentiel spin orbite.

Ces deux préoccupations nous conduisent à chercher à calculer les ordres supérieurs du développement asymptotique dont on pense que la théorie semi-classique donne les termes d'ordre 0, ou tout au moins à définir une méthode qui permette de les obtenir si le besoin s'en présente. Ce problème dépend évidemment de la nature de la collision considérée. Pour éviter des complications non essentielles, nous nous bornerons à examiner le cas d'un potentiel borné, croissant de façon monotone depuis une valeur $-V_o$ jusqu'à 0, et nous nous bornerons ici à l'étudier dans le domaine non-critique. Ce problème qui peut paraître schématique présente un intérêt physique réel. En premier lieu, c'est, très exactement, le problème de la diffusion d'un neutron par un noyau moyen ou lourd vers 40 à 60 Mev. En second lieu, il peut servir à étudier la diffusion des $\alpha$ par les noyaux à des énergies qui ne soient pas trop faibles. En effet, les complications dues au potentiel coulombien sont faciles à lever dans ce cas. Enfin, dans les problèmes où intervient un coeur dur, tels que la diffusion moléculaire, les paramètres asymptotiques sont tels que l'erreur due à l'utilisation de la théorie d'ordre 0 (ie. celle de Ford et Wheeler) est négligeable.

Les trois premières sections de ce chapitre sont consacrées à l'évaluation de l'amplitude de diffusion quand les déphasages JWKB sont utilisés et a l'obtention de formules qui puissent tenir compte simplement du potentiel spin orbite ou de l'absorption. Dans la section 4, la

validité des méthodes d'approximation est étudiée et les corrections évaluées.

Nous désignerons partout par m la masse réduite dans la voie de diffusion, k le moment linéaire ($\hbar k = (2mE)^{1/2}$) et supposerons que les potentiels sont de la forme

$$V = - V_o f(r/a) \qquad f(o) = 1 \qquad (V.0.1)$$

Un choix convenable pour a est celui de l'abscisse de l'extremum de la dérivée du potentiel dans la surface du noyau. Nous utiliserons aussi les notations suivantes :

$$q = (2m V_o/\hbar^2)^{1/2} \qquad x = r/a \qquad \kappa = V_o/E \qquad (V.0.2)$$

## 5.1 - Evaluation asymptotique du déphasage

### Contenu

Nous rappelons d'abord la méthode de Langer pour calculer l'expression asymptotique du déphasage par un potentiel. Nous donnons ensuite des formes plus pratiques pour l'expression intégrale du déphasage, et étudions le cas particulier du voisinage du point critique. Nous étudierons enfin une méthode très simple pour tenir compte d'un potentiel spin orbite ou d'un potentiel d'absorption.

### 5.1.1 - La méthode de Langer

Nous exposons ici la méthode de Langer, sous une forme peut être un peu nouvelle, et attirons l'attention sur une difficulté importante qui peut provenir du voisinage du point critique ou, en termes mathématiques, du passage d'un point tournant d'ordre 1 à un point tournant d'ordre 3. Cette difficulté ne semble pas avoir été étudiée jusqu'ici.

Ecrivons l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \nu^2 \phi^2 (z)\, y = 0 \qquad (V.1.1)$$

et cherchons la forme asymptotique de ses solutions quand $\nu \to \infty$ . Soit $\mathcal{D}_z$ un domaine du plan complexe incluant l'axe réel et son voisinage, et supposons que les conditions suivantes soient remplies dans $_z$ :

1) $$\phi^2(z) = (z - z_o)^{2\beta}\, \phi_1^2(z)$$

où $\beta$ est une constante réelle non négative et $\phi_1^2$ (z) une fonction analytique qui ne s'annule pas dans $\mathcal{D}_z$.

2) L'intégrale $u = \nu \int_{z_o}^{z} \Phi(\tau)\, d\tau$ ne s'annule pas.

Langer [29] a montré que le développement asymptotique de y dans $\mathcal{D}_z$ pour les grandes valeurs de $\nu$ est donné par la solution de l'équation reliée :

$$v'' + \nu^2 \Phi^2(z) + \omega(z)\ v(z) = 0 \qquad (V.1.2)$$

où $\omega(z)$ est une fonction analytique uniforme dans $\mathcal{D}_z$, choisie de telle façon que (V.1.2) soit soluble et ait pour solution :

$$v(z) = (\nu\, \Phi(z))^{-1/2}\ H(u) \qquad (V.1.3)$$

où H(u) est solution de l'équation connue [30]

$$\frac{d^2H}{du^2} + \left(1 + \frac{\beta^2+2\beta}{4(\beta+1)^2\, u^2}\right) H(u) = 0 \qquad (V.1.4)$$

La comparaison de (V.1.2) et (V.1.4) nous permet de calculer $\omega(z)$ :

$$\omega(z) = \frac{\beta^2 + 2\beta}{4(\beta+1)^2}\ \frac{u'^2}{u^2} + \frac{1}{2}\left\{ u\ ,\ z \right\} = \frac{1}{2}\left\{ u^{1/\beta+1},\ z \right\} \qquad (V.1.5)$$

où le symbole utilisé est celui de la dérivée schwarzienne, bien connue comme l'invariant différentiel du groupe de Moebius [31] :

$$\left\{ f\ ,\ z \right\} = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\ \frac{f''^2}{f'^2} \qquad (V.1.6)$$

Pour pouvoir utiliser cette méthode, nous supposerons que le potentiel est une fonction analytique A(z) de z = r/a, où a est une longueur caractéristique, choisie de telle façon que les dérivées du potentiel, par exemple, soient bornés par des nombres de l'ordre de l'unité. L'équation de Schrödinger s'écrit :

$$\frac{d^2y}{dz^2} + z^{-2}\left[ k^2a^2\ F(z) - (p^2 - 1/4) \right] y = 0 \qquad (V.1.7)$$

où
$$F(z) = z^2\ (1 + E^{-1}\ A(z)), A(z) = V_o\ f(z) \qquad (V.1.8)$$

et nous pouvons considérer maintenant des valeurs complexes de z.

La méthode de Langer ne peut s'appliquer à (V.1.7) dans un domaine $\mathcal{D}_z$ contenant z = 0 à cause du pôle en ce point. Pour tourner la difficulté, Langer [32] suggéra le changement de variable :

$$z = \exp(s) \qquad y = \exp(s/2)\ t(s) \qquad (V.1.9)$$

qui conduit à l'équation :

$$t'' + \left[k^2 a^2 F(\exp(s)) - p^2\right] t = 0 \qquad (V.1.10)$$

à laquelle s'applique la méthode de Langer. Les expressions obtenues sont les mêmes [33] que celles que l'on obtiendrait de (V.1.7) en supprimant $(4z^2)^{-1}$. Pour calculer le reste $\mathcal{R}(z)$ il suffit donc de retrancher $(4z^2)^{-1}$ de $\omega(z)$. Ce reste est analytique au voisinage du point tournant et diverge moins vite que $z^{-2}$ à l'origine.

Il est possible de considérer comme "grand" paramètre dans (V.1.7) p ou ka suivant le problème considéré, et suivant que $p(ka)^{-1}$ est ou non fixé. Dans ce travail, nous supposerons ka grand et $p(ka)^{-1}$ fixé. Ainsi, nous prendrons comme fonction $\Phi^2(z)$ :

$$\Phi^2(z) = z^{-2}\left[F(z) - p^2(ka)^{-2}\right]$$

Supposons maintenant que A(z) et z sont réels (on emploiera alors plutôt la notation x), et que A(x) est positif (potentiel attractif). A(x) décroit et $x^2$ croit de x = 0 à + ∞ . Par suite, si l'énergie E est suffisamment élevée, F(x) est une fonction monotone croissante, avec un point d'inflexion, et tout zéro de $\Phi^2$ est d'ordre 1. Pour une certaine valeur $E_c$ de E, l'énergie "critique", la tangente d'inflexion à F(x) devient parallèle à l'axe des x. Pour la valeur correspondante de p, le zéro de $\Phi^2$ est d'ordre 3. Ce point $(E_c, p_c)$ est appelé le point critique.

Si z peut prendre des valeurs complexes, nous appellerons $\mathcal{D}_z$ un domaine "non critique" si $2E + \left[2A(z) + zA'(z)\right]$ ne s'y annule pas. En général nous nous limiterons ici au domaine non critique, de sorte que les seuls zéros possibles de $\Phi^2(z)$ sont d'ordre impair.

Calculons alors le déphasage JWKB : nous devons trouver les coefficients d'une combinaison linéaire des 2 solutions indépendantes de (V.1.6) qui, après insertion dans 1.3, conduit à la solution régulière de l'équation de Schrödinger. Pour définir $\Phi(z)$, nous conviendrons de faire tourner la phase de $(z - z_o)$ de $+\pi$ quand nous traversons le zéro $z_o$ sur une ligne continue. La phase de $\Phi$ est alors augmentée de $3\pi$, celle de u de $(3+1)\pi$. Par suite, la combinaison suivante:

$$A\, u^{1/2}\, J_{1/2(\beta+1)}(u) + B\, u^{1/2}\, J_{-1/2(\beta+1)}(u)$$

sera pour z = 0 et p réel (de sorte que $\Phi^2(z)$ est réelle et négative, et Re u(z) tend vers zéro quand $z \to 0$), égale à :

$$u^{1/2}\left\{ A\, J_{1/2(\beta+1)}\left(\exp\left[i(\beta+1)\pi\right]|u|\right) + \right.$$

$$\left. + B\, J_{-1/2(\beta+1)}\left(\exp\left[i(\beta+1)\pi\right]|u|\right)\right\} \qquad (V.1.11)$$

ou encore

$$i\, u^{1/2}\left\{ A\, I_{1/2(\beta+1)}(|u|) - B\, I_{-1/2(\beta+1)}(|u|)\right\} \qquad (V.1.12)$$

Cette expression ne peut tendre vers zéro si $z \to 0$ que si A est égal à B. Il en est de même de la solution de (V.1.2) obtenue à partir d'elle en utilisant (V.1.3).

Si on compare maintenant le comportement asymptotique, pour z réel et grand, de la solution de l'équation avec potentiel et de celle sans potentiel, nous obtenons, à un multiple de $\pi$ près, le déphasage :

$$\delta(p) = ka\left\{\int_{z_o}^{+\infty\text{réel}} \sqrt{F(z) - \frac{p^2}{k^2a^2}}\ \frac{dz}{z} - \int_{p/ka}^{+\infty\text{réel}} \sqrt{z^2 - \frac{p^2}{k^2a^2}}\ \frac{dz}{z}\right\}$$

(V.1.13)

Puisque $\mathcal{D}_z$ est supposé non critique, F'(z) ne s'annule pour aucune valeur de z dans $\mathcal{D}_z$. Par suite, l'équation aux points tournants :

$$F(z_o) - p^2\,(ka)^{-2} = 0 \qquad (V.1.14)$$

a une solution unique $z_o$. $F^{1/2}(z)$ (nous choisirons la détermination dont la partie réelle est positive sur l'axe reel) est une fonction "simple" * dans $\mathcal{D}_z$. La fonction inverse $z = \psi(\lambda)$ est aussi une fonction"simple". Elles définissent une application bi-univoque de $\mathcal{D}_z$ sur un domaine $\mathcal{D}_\lambda$, et il est bien évident que $\delta(p)$ peut être prolongé analytiquement pour tout p appartenant a ka $\mathcal{D}_\lambda$.

---

* Nous employons ici la terminologie de Titchmarsh (34).

Nous avons démontré (V.1.13) pour un zéro de $\Phi^2(z)$ du 1er ou du 3ème ordre. Cependant, il résulte de (V.1.7) que le "potentiel erreur" $\mathcal{R}(z)$ est infini quand 2S n'est pas l'ordre convenable du zéro.

On doit donc chercher si, au voisinage du point critique, le reste ne devient pas trop grand pour que notre approximation reste valable. Ceci sera étudié dans la section 4.

5.1.2 - Une forme intégrale du déphasage

Dénotons la solution de $\lambda = F^{1/2}(z)$ par :

$$z = \psi(\lambda) \qquad (V.1.15)$$

et définissons la fonction :

$$H(\lambda) = -\int_{\lambda}^{\infty} \left[\tau^{-1} - \psi'(\tau) / \psi(\tau)\right] d\tau = \text{Log} \quad \lambda/\psi(\lambda) \qquad (V.1.16)$$

A partir de (V.1.15, 16, et 13), et en tenant compte du comportement asymptotique de $H(\lambda)$ (étudié au prochain paragraphe), on obtient :

$$\delta(p) = ka \int_{p/ka}^{\infty} \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - (p/ka)^2}} \quad H(\lambda) \quad d\lambda \qquad (V.1.17)$$

Cette formule est valable quels que soient p (et a) tel que $(ka)^{-1}\ p \in \mathcal{D}_{\lambda}$.

5.1.3 - Comportement des fonctions caractéristiques

Comportement asymptotique

Si Re z est assez grand ou, z étant fixé, E assez grand, $E^{-1}\ A(z)$ est petit. On peut alors inverser par itération l'équation qui définit $\lambda$ à partir de z, et obtenir :

$$z = \lambda\left\{1 - \frac{\kappa}{2} f(\lambda) + \frac{1}{8}\kappa^2 f(\lambda)\left[3f(\lambda) + 2\lambda f'(\lambda)\right]\right\} \qquad (V.1.18)$$

Si on remarque maintenant que (V.1.16) peut s'écrire :

$$H(\lambda) = \frac{1}{2} \text{Log}\left[1 + \kappa f(z)\right] \qquad (V.1.19)$$

on voit que, au ler ordre, $H(\lambda)$ est égal à

$$H_o(\lambda) \sim \frac{1}{2} \kappa f(\lambda)$$

Quand cette approximation est valable pour tout z, (V.1.17) représente simplement le terme de Born-JWKB utilisé par certains auteurs [35].

Comportement général

Il est facile de trouver le comportement a l'origine. Pour n'importe quelle valeur on peut aussi, du moins pour $\lambda$ et z réels, obtenir $\lambda(z)$ par inversion graphique de $z = \psi(\lambda)$. On voit immédiatement que, dans la région où la dérivee de V(z) est la plus grande, le comportement de $H(\lambda)$ est encore plus abrupt. Ceci est compréhensible puisque $H'(\lambda)$ doit devenir infini à la limite où $\lambda'(x)$ tend vers 0. Introduisons pour l'étudier, en nous limitant à un potentiel réel et à z réel, $(z = x)$ la fonction G(x) égale à $(\kappa^{-1} + f(x))$. Il résulte de (V.1.16) la relation suivante :

$$\lambda H'(\lambda) = 1 - \left(\frac{x}{\lambda} \frac{d\lambda}{dx}\right)^{-1} = \frac{xG'}{2G + xG'} = \frac{xf'}{2G + xf'} \qquad (V.1.21)$$

et supposons que f(x) est monotone. La valeur critique de $\kappa$ est donnée par :

$$\kappa_c/2 = \left\{ \text{Max}\left[ x|f'(x)| - 2f(x) \right] \right\}^{-1} \qquad (V.1.22)$$

Pour bien des potentiels utiles, f décroit rapidement dans un domaine étroit, et le maximum du dénominateur de (V.1.22) est obtenu dans le voisinage du maximum de $|f'|$. Pour un potentiel de Saxon et Woods, on peut prendre $f = 1/2$, Max $|f'| \sim a(4d)^{-1}$, avec $a = 1{,}3\ A_o^{1/3}$ F, d$\sim$ 0,65 F, et obtenir

$$\frac{1}{2} \kappa_c \sim \left(\frac{a}{4d} - 1\right)^{-1} \sim \left[\frac{1}{2} A_o^{1/3} - 1\right]^{-1}$$

pourvu que cette quantité soit positive. L'approximation non critique n'est donc utilisable que pour des énergies élevées, de l'ordre de $V_o$ ou davantage.

Dans ce domaine non critique, $\lambda H'(\lambda)$ a au moins un minimum. Tant qu'on est assez loin au-dessus du point critique, ce minimum peut se représenter paraboliquement, et sa "largeur" est de l'ordre des dimensions $\delta$ de la surface du noyau. Par contre, au voisinage du point critique, on rencontre un comportement tout nouveau.

Voisinage du point critique

Introduisons les notations suivantes :

$z_1$ est l'abscisse du point d'inflexion de $F(z) = \lambda^2(z)$.

$$\begin{cases} (a) & z - z_1 = t \\ (b) & \lambda^2 - \lambda_1^2 = t\,(s_o + \dfrac{s_2\, t^2}{2}) + \ldots \\ (c) & t_o = (2\, s_o)^{1/2}\, s_2^{-1/2} \\ (d) & (\Delta\lambda)^2 = s_o t_o = 2\, s_o^{3/2}\, s_2^{-1/2} \end{cases} \qquad (V.1.24)$$

Nous supposerons que la dérivée troisième de $\lambda^2$ par rapport à z est suffisamment grande et ne varie pas trop vite au voisinage du point critique. Nous pouvons négliger les dérivées d'ordre supérieur dans un domaine de largeur $\delta$. A partir des relations (V.1.24) nous obtenons

$$\frac{\lambda^2 - \lambda_1^2}{(\Delta\lambda)^2} = \frac{t}{t_o}\left[1 + \left(\frac{t}{t_o}\right)^2\right] = \Lambda\left(\frac{t}{t_o}\right) \qquad (V.1.25)$$

dont nous calculerons l'inverse :

$$\frac{t}{t_o} = T\left[\frac{\lambda^2 - \lambda_1^2}{(\Delta\lambda)^2}\right] \qquad (V.1.26)$$

A partir de ces formules, nous pouvons calculer $H'(\lambda)$ au voisinage de $\lambda_1$ :

$$H'(\lambda) = \lambda^{-1}\left\{1 - \frac{2\lambda^2}{s_o z_1}\,\frac{T'\left[(\lambda^2-\lambda_1^2)/(\Delta\lambda)^2\right]}{1 + (t_o/z_1)\,T}\right\} \qquad (V.1.27a)$$

La fonction T' est égale à :

$$T'(q) = \frac{1}{2}\,(1 + 27/4\, q^2)^{-1/3}\left\{\left[1 + \frac{q}{\sqrt{q^2+4/27}}\right]^{1/3} + \left[1 - \frac{q}{\sqrt{q^2+4/27}}\right]^{1/3}\right\} \qquad (V.1.27b)$$

La quantité entre crochet est une fonction à variations lentes entre 2 pour $q = 0$ et $2^{1/3}$ pour $q = \infty$. Si on remarque que $t_o/z_1\, T$ est négligeable en général par rapport à 1, on peut

représenter $H(\lambda)$ au voisinage de son extremum et quand l'énergie n'est pas très loin au-dessus de l'énergie critique par la relation :

$$H'(\lambda) \sim H'_o(\lambda) - \frac{2\lambda}{s_o z_1} T'\left(\frac{\lambda^2-\lambda_1^2}{(\Delta\lambda)^2}\right) \bar{F}\left(\frac{\lambda^2-\lambda_1^2}{(\Delta\lambda)^2}\right) \qquad (V.1.27c)$$

où $\bar{F}(x)$ est une fonction de filtrage analytique, égale à 1 pour un argument nul, et tendant rapidement vers zéro quand $t_o > \delta$.

5.1.4 - Effets dus à une perturbation du potentiel

Nous pouvons utiliser deux méthodes simples pour les calculer :

Calcul des perturbations au 1er ordre

On peut développer $\lambda(z)$ en puissance de la perturbation. Les opérations de départ :

$$\lambda = z\left[1 + \kappa \quad f(z)\right]^{1/2} \quad \Rightarrow \quad z = \psi(\lambda)$$

deviennent en présence de la perturbation $\kappa\, g(z)$ :

$$\lambda = z\left[1 + \kappa f(z) + \kappa\, g(z)\right]^{1/2} \Rightarrow \quad z = \psi^+(\lambda)$$

et, au premier ordre de la perturbation, on obtient :

$$H^+(\lambda) \sim H(\lambda) + \kappa \frac{\psi'(\lambda)\ \psi(\lambda)}{2\lambda} \quad g\left[\psi(\lambda)\right] \qquad (V.1.28)$$

La correction à $H(\lambda)$ ne devient sensiblement égale à $1/2\ \kappa\, g(\lambda)$ qu'à la limite où $\lambda \to \infty$. Au voisinage du point critique, $\psi'(\lambda)$ tend vers l'infini et cette méthode est inapplicable.

Méthode de perturbation self-similaire

On va supposer que le potentiel perturbé est décrit par la même fonction analytique que le potentiel de départ, mais avec une longueur caractéristique différente. On permettra ensuite à cette longueur de varier elle-même lentement avec la distance. Nous utiliserons la notation $z\ F(z)$ au lieu de $F^{1/2}(z)$, et il est clair, si l'on se reporte à l'équation (V.1.8) que seul $F(z)$ sera modifié par la perturbation. Si $z\ F(z)$ a pour inverse $\psi(\lambda)$, soit $\psi^+(\lambda)$ l'inverse de $z\ F(z(1 + \xi(z))$ , $\psi^+(\lambda)$ est une solution de l'équation fonctionnelle :

$$\psi^+(\lambda) = \frac{\psi\left[\lambda(1 + \xi(\psi^+(\lambda))\right]}{1 + \xi(\psi(\lambda))}$$

Compte tenu de la "douceur" de la fonction $\psi$, on peut négliger sa variation de l'argument $\psi(\lambda)$ à l'argument $\psi^+(\lambda)$, et obtenir :

$$\psi^+(\lambda) \sim \frac{\psi\left[\lambda(1 + \xi(\psi(\lambda))\right]}{1 + \xi(\psi(\lambda))} \qquad (V.1.29)$$

Il est évidemment possible d'obtenir une meilleure approximation en procédant par itération. Ainsi cette méthode est équivalente à une transformation de l'échelle des longueurs par un facteur variant lentement. Elle peut être considérée grossièrement comme une méthode de similitude, et toutes les quantités seront transformées par l'introduction de la perturbation suivant la "dimension" qu'ils possèdent dans ce cadre. La méthode ordinaire des perturbations est équivalente à celle-ci si $\xi(z)$ est pris égal à $g(z)\left[z\ f'(z)\right]^{-1}$. Or, ceci n'est possible que si $g(z)$ tend vers zéro quand $z \to 0$. On voit que la méthode des perturbations usuelle convient mieux pour des perturbations centrales, la nôtre pour des perturbations de surface. Des relations (V.1.16) et (V.1.29) nous tirons $H^+(\lambda)$ :

$$H^+(\lambda) \sim H\left[\lambda(1 + \xi(\psi(\lambda))\right] \qquad (V.1.30)$$

Si l'on veut aller plus loin et obtenir une transformation de similitude pour $\delta(p)$, tel qu'il est donné par (V.1.17), nous devons prendre comme nouvelle variable :

$$\mu = \lambda\left[1 + \xi(\psi(\lambda))\right] = \lambda(1 + \xi_o(\lambda))$$

Ceci est possible seulement si $\mu$ est une fonction inversible. Or sa dérivée

$$\frac{\partial \mu}{\partial \lambda} = 1 + \xi(\psi(\lambda)) + \lambda \frac{d\xi}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{d\lambda} \qquad (V.1.31)$$

montre qu'il est bon de choisir $\xi$ de telle façon que $|\frac{d\xi}{d\psi}|$ soit minimum quand $\psi'$ est maximum, donc dans la région de la surface. On peut voir aussi que $\xi$ doit varier très lentement, et plus précisément ne pas varier plus vite que $z$ ou $z^{-1}$.

L'inversion de $\mu(\lambda)$ donne

$$\lambda = \mu(1 + \xi_1(\mu)) \qquad (V.1.32)$$

qui nous permet de calculer le nouveau déphasage :

$$\delta^+(p) = ka \int_{u_o}^{\infty} \frac{\mu\ H\ (u)\ \ du}{\sqrt{u^2 - u_o^2\left[(1 + \xi_1(u_o))/(1 + \xi_1(u)\right]^2}} \left[1 + \xi_1(u) + \mu\xi'_1(u)\right] \qquad (V.1.33)$$

ou $u_o = (ka)^{-1}\ p\ (1 + \xi_o(p/ka))$

Si $\xi_1(\mu)$ est développé en puissances de $(\mu-\mu_o)$, on obtient au ler ordre en $\mu-\mu_o$ et pourvu que $\mu_o\ \xi'_1(\mu_o)$ soit beaucoup plus petit que $\xi_1(\mu_o)$, la relation de similitude :

$$\delta(p) = k\ b \int_{p/kb}^{\infty} \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - p^2/k^2b^2}}\ H(\mu)\ d\mu \qquad (V.1.34)$$

où

$$kb = \frac{ka}{1 + \xi_o(p/ka)} \qquad (V.1.35)$$

On peut écrire cette relation sous la forme abrégée :

$$\delta(p) \sim k\ b(p)\ \Phi(p/kb(p)) \qquad (V.1.36)$$

où $\Phi$ est une fonction sans dimensions. Avec les mêmes approximations, on obtient de même

$$\delta'(p) \sim \Phi'\ (p/kb(p)) \qquad (V.1.37)$$

$$\delta''(p) \sim \Phi''\ (p/kb(p)) \qquad (V.1.38)$$

Dans ces approximations, et rigoureusement si $\xi$ est une constante, des quantités importantes ne varient pas par suite de l'adjonction de la perturbation. C'est le cas de l'énergie critique, l'abscisse de points caractéristiques tels que les points d'inflexion de $\lambda$ et $\lambda^2$, et nous le verrons plus loin, l'angle arc-en-ciel.

## 5.2 - Une forme intégrale pour l'amplitude de diffusion

### Contenu

Nous allons montrer qu'en définissant de façon convenable la fonction d'interpolation des pôlynomes de Legendre, il est possible d'obtenir une forme intégrale très précise pour l'amplitude de diffusion, et dont la précision est reliée à la décroissance de l'amplitude de diffusion aux grands angles.

### Développement

Dans l'analyse semi-classique, l'amplitude de diffusion est transformée en intégrale et calculée par la méthode de la phase stationnaire. Nous voulons justifier ici ces deux étapes - qui sont reliées - de la théorie semi-classique. La méthode que nous donnons peut s'appliquer aussi

bien aux développements en fonctions de Bessel, etc. pourvu que les conditions de base soient réunies.

Le problème peut être considéré comme résolu quand l'amplitude de diffusion est réduite à une intégrale de la forme :

$$\int_a^b \exp.\left[i\rho\, h(t)\right] g(t)\, dt \qquad (V.2.1)$$

En effet, la méthode de la phase stationnaire a reçu des justifications très complètes [36] quand $\rho$ est un "grand" paramètre réel, h(t) une fonction réelle de la variable réelle t, g(t), h(t) et leurs dérivées sont bornées jusqu'à l'ordre N. On obtient un développement asymptotique jusqu'à l'ordre N en puissances de $\rho^{-\alpha}$, où $\alpha$ est l'ordre du point stationnaire.

L'extension au cas complexe est difficile et en général il vaudra mieux utiliser la méthode du col. Pourquoi utiliser la méthode de la phase stationnaire ? On pourrait penser par exemple à faire une transformation de Watson, etc. L'intérêt de la méthode de la phase stationnaire réside en deux propriétés importantes.

1) Elle a une interprétation physique directe (l'interprétation classique).

2) Elle ne demande comme justification que de connaître les propriétés des fonctions sur l'intervalle d'intégration.

Nous allons maintenant mettre sous la forme (V.2.1) l'amplitude de diffusion. Partons d'un développement de la forme :

$$A = \sum_0^\infty (2\ell+1)\, \eta(\ell+1/2)\, P_\ell(\cos\theta) \qquad (V.2.2)$$

et utilisons la formule de Poisson [37] :

$$\sum_0^\infty F(n+1/2) = F(o) + \int_o^\infty F(x)\, dx + \bar{T} \qquad (V.2.3)$$

$$\bar{T} = 2 \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \int_o^\infty F(x) \cos 2\pi n x\, dx \qquad (V.2.4)$$

qui peut se prouver facilement et est valable pourvu que $\int_o^\infty |F(x)|dx$ et $\int_o^\infty |F'(x)|\, dx$ soient bornés.

F(x) est une fonction d'interpolation quelconque de F(n+1/2) qui satisfait ces conditions.

Dans 2.2, F(n+1/2) est un produit de 2 termes, et la méthode JWKB nous fournit une fonction d'interpolation pour le premier. Nous allons montrer que si une transformée de Fourier $\varrho(x)$ de

p $\eta(p)$ décroit rapidement et tend vers 0 plus vite que $x^{-2}$ pour $x \geq M$ ($M < \pi$), alors $\bar{T}$ est petit et peut facilement être borné, pourvu qu'on choisisse pour $P_\ell(\cos\theta)$ une fonction d'interpolation de spectre fini, nul hors de $(0,\pi)$, dans la transformée de Fourier considérée. On pourra dire que $e(x)$ est "négligeable" ou a une queue négligeable au-delà de M. Supposons par exemple que ce soit la transformée sinusoïdale $\delta(x)$ de p $\eta(p)$ qui soit négligeable au-delà de M, et définissons la fonction d'interpolation $\Pi_p(\cos\theta)$ pour les polynômes de Legendre :

$$\Pi_p(\cos\theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_\theta^\pi (\cos\theta - \cos x)^{-1/2} \sin p\, x\, dx \qquad (V.2.5)$$

En utilisant $\delta(x)$ et cette forme dans (V.2.4), et en appliquant le théorème de Fubini, on peut mettre le reste sous la forme :

$$T(\theta) = 2\frac{2}{\pi} \sum_1^\infty (-1)^n \int_\theta^\pi \frac{dx}{\sqrt{\cos\theta - \cos x}} \left\{ \delta(2\pi n + x) - \delta(2\pi n - x) \right\} \qquad (V.2.6)$$

Si $\delta(x)$ est assez "douce", les formules suivantes donnent une évaluation du reste, la première pour $\theta$ petit, la seconde pour $\theta \sim \pi$, et, grossièrement, pour toutes les valeurs de $\theta$:

$$T(\theta) \sim 8 \sum_1^\infty (-1)^n \delta'(2\pi n) \qquad (V.2.7a)$$

$$T(\theta) \sim 2 \sum_1^\infty (-1)^n \left\{ \delta\left[(2n+1)\pi\right] - \delta\left[(2n-1)\pi\right] \right\} \qquad (V.2.7b)$$

Si on avait utilisé la transformée cosinusoïdale $c(x)$, on aurait dû utiliser pour les polynômes de Legendre les fonctions de Legendre usuelles comme interpolées, et on aurait ensuite obtenu des formules analogues.

La tranformée sinusoïdale est utile si $\eta(p)$ est une fonction paire, la transformée cosinusoïdale si c'est une fonction impaire. Dans chacun des cas, la queue de l'autre transformée n'est pas négligeable mais en $x^{-1}$ quand $x \to \infty$. Toutefois il s'agit là des "queues"très éloignées, des grandes valeurs de x. Pour évaluer leur valeur pour x de l'ordre de $\pi$, qui apporte vraisemblablement la contribution la plus importante au reste $T$, on peut employer les méthodes asymptotiques de la théorie semi-classique. Supposons par exemple que

$$\eta(p) = \exp\left[ i\, h(p) \right]$$

et que $|h'(p)|$ présente un maximum pour une grande valeur $p_o$ de p, $x = M_o$ est un arc-en-ciel pour l'intégrale qui donne $\delta(x)$, de sorte que $\delta(x)$ décroit très rapidement au-delà de $M_o$. Si $\eta(p)$ est de plus une fonction analytique et paire, en choisissant la transformée sinusoïdale de

Fourier, on obtient le reste $T$ le plus petit possible. Ces conditions seront remplies dans la plus grande partie du domaine non critique.

Difficultés associées à certaines fonctions de déflexion

Supposons maintenant que $|h'(p)|$ soit bornée par M inférieur à $\pi$ sauf sur un petit intervalle $\mathcal{D}_M$, où elle présente un pic sommable, de part et d'autre duquel h'(p) est monotone. Nous supposerons par exemple que h'(p) est négative dans $\mathcal{D} > \mathcal{D}_M$.

Toutes les intégrales qui interviennent dans $\delta(x)$, et, nous le verrons plus loin, dans le calcul de l'amplitude de diffusion, peuvent être étudiées sur l'exemple simple :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i\, h\,(p) + i\, p\, y\right] dp \qquad (V.2.8)$$

a) Si $|h'(p)|$ est bornée sur $\mathcal{D}_M$ par N ($h'(p_o) = -N$), I décroit très rapidement pour $y > N$

b) Pour y plus petit que N (ou n'importe quel y, si $|h'(p_o)|$ n'est pas borné) définissons $\gamma^{\pm}(y)$ par la relation suivante :

$$h'\,(p_o \pm \gamma^{\pm}(y)) + y = 0 \qquad (V.2.9)$$

Les $\gamma$ sont les abscisses relativement à $p_o$ des points stationnaires dans (V.2.8)(cf. figure 13). Tant que leur distance $\gamma(y)$ est beaucoup plus grande que $y^{-1}$, la méthode de la phase stationnaire donne de bons résultats et (V.2.8) est donné par la figure d'interférence entre leurs deux contributions. Quand $\gamma(y)$ devient du même ordre que $y^{-1}$, nous avons une "zone perturbée", où il est indispensable d'utiliser des formes précises pour h' afin d'obtenir une approximation convenable. Comme le pic est sommable, $(p - p_o)\, h'(p)$ tend vers zéro quand $p \to p_o$, de sorte qu'il existe un ensemble de valeurs de p, $\mathcal{D}_{M_o}$, pour lequel $\gamma(y) < y^{-1}$. La variation totale de py dans ce domaine est inférieure à 1, de sorte que les méthodes habituelles de la phase stationnaire ne s'appliquent pas. Pour avoir une idée de la valeur de l'intégrale (V.2.8), nous séparerons la fonction h(p) en deux parties (cf. figure 13), l'une arrondie, l'autre qui contient le pic : on pourra par exemple se servir d'une fonction de filtrage F et écrire :

$$\begin{cases} h = \int_o^p (h'_r + h'_s)\, dp \\ h'_r = h' - (h' + y_o)\, F \\ h'_s = (h' + y_o)\, F \end{cases} \sim \begin{cases} h' \text{ pour } p \notin \mathcal{D}_{M_o} \\ -\, y_o \text{ pour } p \in \mathcal{D}_{M_o} \end{cases} \qquad (V.2.10)$$

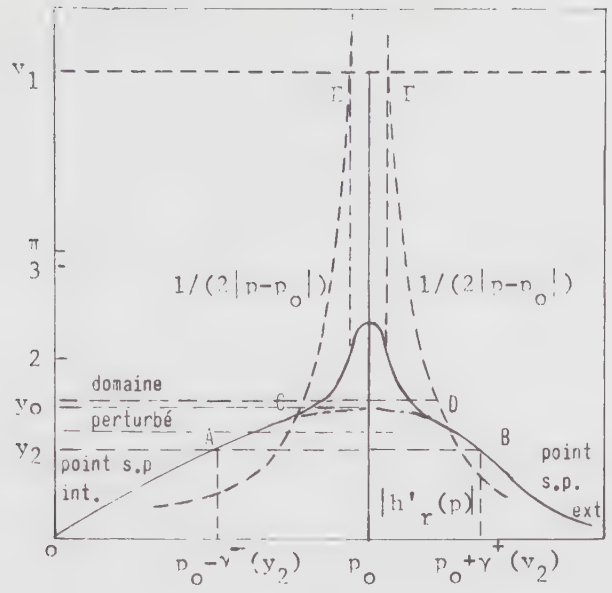


FIGURE 13

$|h'(p)|$ est donnée par la ligne en traits pleins. $|h'_r(p)|$ est donné par la ligne hachurée entre C et D et les 2 parties de la ligne en traits pleins hors CD. Pour une valeur donnée de y(e.g. $v_1$), $I_2$ (formule V.2.12) décroit rapidement par suite d'interférences destructives si $|h'(p)|$ ne varie pas appréciablement sur la distance EF.

Si la fonction de filtrage est mal choisie, ce genre de séparations risque d'introduire artificiellement dans les dérivées secondes, qui pourraient conduire à une queue oscillante amortie par un facteur $y^{-2}$ dans les expressions (V.2.11) ou (V.2.12) ci-dessous. Cette difficulté n'est pas sérieuse, et peut être négligée pour les 3 raisons suivantes *:

1) Ces queues de fonction sont plus faibles que celles qui proviennent du pic lui-même.

2) Il est possible d'employer la même méthode avec la dérivée suivante, et de réduire ainsi l'erreur.

3) Il est possible de choisir la fonction de filtrage de façon à amortir les bosses dues à la discontinuité.

En définitive, I est la somme des 2 quantités suivantes :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\,(i\, h_r(p) + ipy)\, dp \qquad (V.2.11)$$

---

* En fait, un procédé mathématiquement correct pour "arrondir" le pic s'obtient en sens inverse, en coupant le spectre de sa transformée de Fourier.

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\ (i\ h_r(p))\ \ (\exp\ (i\ h_s(p)) - 1)\ \exp(i\ p\ y)\ dp \qquad (V.2.12)$$

Supposons maintenant que $h_r(p)$ est de la forme $\nu\Phi(p\ \nu^{-1})$, où $\nu$ est un paramètre de valeurs "grandes". $I_1$ peut être évalué par la méthode de la phase stationnaire et se comporte comme un arc-en-ciel des 2 côtés de $y_o$. Son ordre de grandeur sur le côté éclairé est $\nu^{1/2}$. La méthode d'estimation la plus simple pour $I_2$ consiste à remplacer $(\exp\left[i\ h_s(p)\right] - 1$ par une fonction échelon :

$$I_2 \sim (\exp\ (i\ h_s(\infty)) - 1 \int_{p_o}^{\infty} \exp\left[i\ h_r(p) + i\ p\ y\right] dp \qquad (V.2.13)$$

Désignons par $\Delta$ la largeur de l'intervalle des y qui, au-dessous de $y_o$ est perturbé par la présence du pic. Pour $y < y_o - \Delta$, la relation (V.2.13) montre que $I_2$ apporte à l'amplitude de diffusion une contribution proportionnelle à celle du point de phase stationnaire dans $I_1$, plus des oscillations $\overline{i}_2$ provenant de la borne inférieure de l'intégrale :

$$\overline{i}_2(y) \sim (\exp\ (i\ h_s(\infty)) - 1)\ \exp\ (i(h_r(p_o) + p_o y))\ /\ \ i(h'_r(p_o) + p_o y) + O(\nu^{-1}) \qquad (V.2.14)$$

Pour $y > y_o$, seul ce terme oscillant subsiste, mais, si nous voulons mettre en évidence l'inévitable amortissement des oscillations pour les grandes valeurs de y, nous devons utiliser une formule plus précise que (V.2.14) :

$$i_2(y) \sim \exp\ (i\ h_r(p_o) + p_o y) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i(p - p_o)(h'_r(p_o) + y)\right]\ (\exp\ (i\ h_s(p)) - 1 \qquad (V.2.15)$$

Cette formule et la précédente ne sont valables que s'il est possible de remplacer $h_r$ par sa tangente au voisinage de $p_o$. Si $h_r(p_o)$ est réellement une bosse de contour très adoucie (cas d'un pic étroit superposé à une fonction "douce", pas de "région perturbée") les conditions de validité peuvent s'écrire :

$$|h'_r(p_o) + y| \gtrsim |h'''_r(p_o)|^{1/3} \sim \nu^{-2/3} \qquad (V.2.16)$$

Dans le cas général, la limitation sera :

$$|h'_r(p_o) + y| \gtrsim |h''_r(p_o \pm \gamma^{\pm}\ (y_o))|^{1/2} \sim \nu^{-1/2} \qquad (V.2.17)$$

Il n'est pas difficile de voir sur la formule (V.2.15) que si le pic est borné par une valeur N les oscillations décroîtront très vite pour $y > N$, et disparaîtront en pratique pour les

valeurs de y telles que $h'_s$ ne varie pas de façon appréciable sur un intervalle $y^{-1}$.

Ces formules sont illustrées par la figure 13, où les raisonnements peuvent se suivre commodément.

Résultats finaux

La séparation de h en deux parties permet décrire l'amplitude de diffusion sous la forme :

$$A = R(\theta) + T_r(\theta) + S_o(\theta) + S_1(\theta) \qquad (V.2.18)$$

où

$$R(\theta) = 2 \int_o^\infty p \exp(i h_r(p)) \Pi_p(\cos\theta)\, dp \qquad (V.2.19)$$

$$T_r(\theta) = \sum_o^\infty (2\ell+1) \exp(i h_r(\ell+1/2)) P_\ell(\cos\theta) - R(\theta) \qquad (V.2.20)$$

$$S_o(\theta) = 2 \int_o^\infty \Pi_p(\cos\theta) \exp(i h_r(p)) (\exp(i h_s(p)) - 1)\, p\, dp \qquad (V.2.21)$$

$$S_1(\theta) = 4 \sum_1^\infty (-1)^n \int_o^\infty \Pi_p(\cos\theta) \cos 2\pi np \exp(i h_r(p))(\exp(i h_s(p)) - 1)\, p\, dp \qquad (V.2.22)$$

Il est possible d'évaluer $R(\theta)$ en remplaçant $\Pi_p(\cos\theta)$ par une formule asymptotique telle que celle donnée en appendice (B 2.2). Pour les valeurs de $\theta$ supérieures à $p_o^{-1}$, cette évaluation revient au calcul d'intégrales de la forme (V.2.13), plus des corrections d'ordre $\nu^{-1}$ dues à la deuxième branche ($e^{-ip\theta}$) de $\Pi_p(\cos\theta)$, plus des corrections d'ordre $\nu^{-1/2}$ dues au terme suivant dans la méthode de la phase stationnaire. $S_o(\theta)$ fournit une contribution d'ordre relatif $\nu^{-1/2}(e^{i h_s(\infty)} - 1)$ qui est reliée à la discontinuité de h en $p_o$ et distincte de l'interférence entre les 2 contributions des points de phase stationnaire.

Pour $\theta > \nu_o$, $S_o(\theta)$ donne seulement des oscillations, semblables à V.2.15) et pour lesquelles une approximation assez bonne sera obtenue par la formule :

$$S_o(\theta) = 2p_o^{1/2} \left(\tfrac{1}{2}\pi \sin\theta\right)^{-1/2} \exp(i h_r(p_o)) \times \qquad (V.2.23)$$

$$\int_o^\infty \exp(i(p - p_o) h'_r(p_o)) \cos(p\theta - \pi/4) (\exp(i h_s(p)) - 1)\, dp$$

$$\sim p_o^{1/2} \left(\tfrac{1}{2}\pi \sin\theta\right)^{-1/2} \exp(i h_r(p_o)) \sigma_o(\theta) \left\{ \frac{\exp(i(p_o\theta - \pi/4))}{\theta - y_o} + \frac{\exp(-i(p_o\theta - \pi/4))}{\theta + y_o} \right\}$$

où $\sigma_o(\theta)$ rend compte de l'amortissement des oscillations et décroit de 1 à 0 quand $\theta$ croit à partir de la région perturbée.

$S_1(\theta)$ est parfaitement négligeable en comparaison de $S_o(\theta)$ pour $\theta < p_o^{-1}$, et, pour valeurs de $\theta$ supérieures, on peut le calculer comme la somme convergente d'intégrales semblables à (2.12) sauf que y doit être remplacé par $\pm (2\pi n \pm \theta)$. Il est facile de voir que, dans la plupart des cas, seules les 2 intégrales où $y_o = \pm (2\pi - \theta)$ peuvent donner une contribution non négligeable.

Nous conclurons cette section par deux remarques.

1) Un pic très étroit et qui augmente la phase de h de $2\pi$ n'a pas d'effet sur A : de tels pics apparaissent dans la diffusion spirale.

2) L'erreur $T_r$ est liée à l'amplitude de la queue de $R(\theta)$, de sorte qu'on peut la déduire des résultats expérimentaux pour les grandes valeurs de $\theta$.

## 5.3 - L'amplitude de diffusion

### Contenu

Après avoir analysé le comportement de $\delta(p)$ dans les deux premiers paragraphes, nous évaluons l'amplitude de diffusion en présence d'absorption, en supposant pour simplifier que l'absorption peut être décrite dans le modèle self-similaire.

Nous étudions ensuite la variation de l'amplitude de diffusion avec l'angle d'observation.

### 5.3.1 - Comportement de $\delta(p)$ quand $p \to 0$.

Comme nous l'avons vu plus haut, il est utile de connaître le comportement de $\delta(p)$ quand $p \to 0$ pour choisir la fonction d'interpolation des polynômes de Legendre, afin de minimiser l'erreur due aux queues des transformées de Fourier de $\delta(p)$ au-delà de $\pi$.

Nous avons montré dans la section 5.1 que $H(\lambda)$ est une fonction analytique quand $\lambda \to 0$. De plus, $H(\lambda)$ est une fonction paire si le potentiel l'est aussi, et n'a pas de parité définie autrement. Si nous supposons maintenant qu'une fonction analytique paire $P(\lambda)$ décroît plus vite que $\lambda^{-1}$ quand $\lambda \to \infty$, nous pouvons montrer sans difficulté, en faisant auparavant une intégration par partie chaque fois qu'on la dérive par rapport à p, que la fonction $\tilde{P}(p)$ définie par

$$\tilde{P}(p) = \int_p^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - p^2}} P(\lambda)\, d\lambda \qquad (V.3.1)$$

est une fonction analytique et paire, et qui se comporte quand $p \to \infty$ comme $P(\lambda)$ quand $\lambda \to \infty$. Par contre, si $I(\lambda)$ est une fonction impaire, sa transformée $\tilde{I}(p)$, définie de la même façon que $\tilde{P}(p)$, peut seulement être mise sous la forme :

$$\tilde{I}(p) = \tilde{F}(p) - p^2\, \tilde{G}(p)\, \mathrm{Log}\, p \qquad (V.3.2)$$

où $\tilde{F}(p)$ et $\tilde{G}(p)$ sont des fonctions analytiques et paires qui ne s'annulent pas pour $p = 0$.

Les perturbations dues à la singularité logarithmique peuvent être facilement étudiées, et n'introduisent dans le comportement asymptotique de $\delta(x)$ qu'un terme borné par $Cx^{-2}$. Toutefois, dans un but de simplification, nous supposerons que le potentiel est pair. C'est d'ailleurs une hypothèse physique raisonnable pour les noyaux assez lourds, par suite des relations entre le potentiel optique et la densité nucléaire.

5.3.2 - Comportement de $\delta(p)$ en général (p réel)

$\delta'(p)$ est donné par la relation :

$$\delta'(p) = \int_{\lambda_o}^{\infty} \frac{\lambda_o}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda_o^2}}\, H'(\lambda)\, d\lambda \qquad (V.3.3)$$

où $\lambda_o = p(ka)^{-1}$

Avec les hypothèses faites sur $H(\lambda)$, $\delta'(p)$ est nul pour $p = 0$, passe par un minimum pour $p = p_o$, et tend vers zéro asymptotiquement comme $\left\{\lambda^{-1} - \Phi'(\lambda)\, \Phi(\lambda)^{-1}\right\}$, donc comme le potentiel. Les seules valeurs de $\lambda_o$ pour lesquelles $|\delta'(p)|$ peut avoir des valeurs assez grandes sont situées au voisinage de la valeur $\lambda_1$ pour laquelle $|H'(\lambda)|$ est maximum. Quand la largeur du maximum de $|H(\lambda)|$ est bien supérieure à $(ka\, \lambda_M)^{-1}$, la largeur du maximum de $|\delta'(p)|$ est supérieure à $p_o^{-1}$. Les méthodes de la phase stationnaire et la théorie semi-classique doivent alors donner de bons résultats, et les ordres supérieurs se calculent facilement. Toutefois, on ne peut dans ce cas pour obtenir un ordre de grandeur de $|\delta'(p)|$ se contenter d'une description approchée du maximum de $|H'(\lambda)|$, car tous les autres points donnent une contribution appréciable. Par contre, lorsque le maximum est étroit, et prend la forme cubique étudiée dans la section 1, on peut calculer $\delta'(p)$ de façon approchée au voisinage de $\lambda_o = \lambda_1$ par :

$$\delta'(p) \sim \delta'_o(p) - \frac{\lambda_o \Delta\lambda}{s_o z_1}\, S\left[\frac{\lambda_o^2 - \lambda_1^2}{(\Delta\lambda)^2}\right] \qquad (V.3.4)$$

où $S(\xi)$ est définie par :

$$S(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} T'(v)\, \bar{F}(y)\, (v-\xi)^{-1/2}\, dy \qquad (V.3.5)$$

Une formule grossièrement approchée donne l'allure de cette fonction

$$S(\xi) \quad \frac{1}{2} \frac{\Gamma(1/4)\ \Gamma(1/4)}{\Gamma(1/2)} \quad (1 + \frac{27}{4} \xi^2)^{-1/12} \qquad (V.3.6)$$

Sauf au voisinage immédiat de son sommet, ce pic n'a pas l'allure parabolique supposée dans la théorie de l'arc-en-ciel. Toutefois, tant que $ka(\Delta\lambda)^2$ est beaucoup plus grand que 1, la hauteur du pic est bornée par $(ka)^{1/6}$, de sorte que remplacer l'amplitude de diffusion par le terme R de la section 5.2 est une bonne approximation dans la plupart des cas.

Lorsque $ka(\Delta\lambda)^2$ devient plus petit que 1, nous atteignons le voisinage immédiat du point critique. Nous étudierons ce cas, qui nécessite une étude critique de la méthode JWKB, plus loin.

Le domaine de validité de l'équation (V.3.4) est sensiblement le même que celui de (V.1.25b) $\delta'_o(p)$ est dans tout ce domaine une fonction très douce. Aux frontières du domaine, $|\delta'(p)|$ est en général très petit, de sorte que la formule (V.3.4) peut donner un bon ordre de grandeur de l'amplitude de diffusion. L'aspect de l'amplitude de diffusion sera grosso modo celui d'un arc-en-ciel, mais les oscillations sur le côté éclairé ne seront des oscillations de Fresnel que dans un petit voisinage de l'angle arc-en-ciel.

## 5.3.3 - Evaluation de l'amplitude de diffusion en présence d'absorption

Nous supposerons que la partie imaginaire du potentiel, et, d'ailleurs les autres perturbations au potentiel central, peuvent être décrites par le modèle self-similaire donné en section 1.

Toutefois, pour évaluer plus facilement les erreurs, nous emploierons une technique un peu différente : nous admettons la validité de la relation (V.1.37), qui donne $\delta'(p)$, avec $kb(p) = ka\ (1 + \varepsilon(p/ka))$, où $\varepsilon(x)$ est une fonction complexe à variations lentes, a est réel ou complexe. $\delta(p)$ et $\delta''(p)$ sont obtenus à partir de $\delta'(p)$ par les approximations "self-similaires". On obtiendra ainsi :

$$\begin{cases} \delta(p) = k\ b(p)\ \Phi(p/kb(p))\,\varepsilon_1(p/kb(p)) \\ \delta'(p) = \Phi'\ (p/kb(p)) \\ \delta''(p) = \left[kb(p)\right]^{-1} \Phi''\ (p/kb(p))\ \varepsilon_2(p/kb(p)) \end{cases} \qquad (V.3.7)$$

où

$$\begin{cases} \varepsilon_1(p/kb(p)) \sim \left[1 + \varepsilon(p/ka)\right]\left[1 + \varepsilon(p/ka) - p/ka\ \varepsilon'(p/ka)\right]^{-1} \\ \varepsilon_2(p/kb(p)) = 1 - \dfrac{p/ka\ \varepsilon'(p/ka)}{1 + \varepsilon(p/ka)} \end{cases} \qquad (V.3.8)$$

sont des fonctions analytiques quand $x(1 + \varepsilon(x))^{-1}$ est une fonction "simple". Il est bien clair que la donnée de $\Phi'$ détermine entièrement le problème, et $H(\lambda)$, nous le verrons plus loin (chapitre VI ) peut en être déduit facilement.

Désignons par $\phi_o(p/kb(p))$, $\bar{\varepsilon}_1(p/kb(p))$ et $\bar{\varepsilon}_2(p/kb(p))$ les phases de $kb(p)$, $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$. Nous supposerons dans tout ce travail que pour tout p tel que $p/kb(p)$ est réel, on a l'inégalité :

$$0 \leq \phi_o \pm \bar{\varepsilon}_2 < \frac{\pi}{2} \qquad (V.3.9)$$

où les signes $\pm$ correspondent respectivement au cas

$$p/kb(p) \lesseqgtr p_o/kb(p_o) \qquad (V.3.10)$$

Quand $\varepsilon$ varie lentement, les phases $\bar{\varepsilon}_1$ et $-\bar{\varepsilon}_2$ sont sensiblement égales, et si nous supposons que $\varepsilon'(x)$ est nul près du maximum de $|f'(x)|$, $\bar{\varepsilon}_2$ s'annule et change de signe au voisinage de la position de l"arc-en-ciel". La borne inférieure dans (V.3.10) assure que les paquets d'onde sont absorbés, la borne supérieure , que cette absorption n'est pas trop forte.

Nous étudierons le cas général où $\delta(p)$ a été séparé en 2 parties $\delta_r(p)$ et $\delta_s(p)$, $\delta'_s(p)$ possédant un pic trop étroit pour que les méthodes de phase stationnaire puissent s'appliquer. Il est facile de faire la séparation de telle façon que les relations de similitude soient conservées et que $\delta_r(p)$ et $\delta_s(p)$ soient donc de la forme 3.7, avec des fonctions $\Phi_r$ et $\Phi_s$ différentes.

Expression de l'amplitude de diffusion

Compte tenu du comportement de $\delta(p)$, les résultats de la section 5.2 nous permettent d'écrire l'amplitude de diffusion sous la forme :

$$A(\theta) = 2\,ik\,f(\theta) = 2\int_o^\infty p\left[\exp(2i\,\delta_r(p)) - 1\right]\Pi_p(\cos\theta) + A_s(\theta) \qquad (V.3.11)$$

où $A_s(\theta)$ donne seulement des oscillations au voisinage du point critique. Le 1er terme sera noté $A_r(\theta)$. Nous pouvons simplifier l'expression (V.3.11) de la façon suivante.

Nous donnons en appendice le comportement des fonctions $\Pi_p(\cos\theta)$ : pour $\theta$ hors du voisinage de $\pi$, les formules B2.2 et B2.3, pour les grandes valeurs de $\theta$, $\pi$ inclus, la formule B2.4 . Le second terme dans B2.1 (ou B2.3 pour les grandes valeurs de p), se comporte comme le produit par $\cos p\pi$ d'une fonction douce de p. Il ne peut donner qu'une contribution négligeable, compte tenu du comportement de $\delta(x)$. Si $\theta$ n'est pas dans le voisinage de $\pi$, on peut remplacer $\Pi_p(\cos\theta)$ par le premier terme de son développement asymptotique uniforme (valable pour $\theta$ petit, quelque soit p, et pour $p\theta$ grand).(V.3.11) prend ainsi la forme :

$$A(\theta) \sim 2(\theta/\sin\theta)^{1/2} \int_0^\infty p(\exp\left[2i\ \delta_r(p)\right]-1)\ J_o(p\theta)\ dp + A_s(\theta) \qquad (V.3.12)$$

où

$$\delta_r(p) = ka \int_{p/ka}^\infty \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-(p/ka)^2}}\ H_r(\lambda)\ d\lambda$$

Cette relation (V.3.12) généralise la formule de Glauber [38], avec quelques modifications, en particulier le remplacement du potentiel par H et le terme oscillant $A_s(\theta)$. D'autres expressions asymptotiques permettraient d'obtenir une formule analogue au voisinage de $\pi$.

Evaluation de l'amplitude de diffusion

Définissons les fonctions :

$$\overline{\Pi}_p(\cos\theta) = \frac{2}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{\cos pu}{\sqrt{2(\cos\theta - \cos u)}}\ du \qquad (V.3.13)$$

$$E_p(\cos\theta) = \overline{\Pi}_p(\cos\theta) + i\ \Pi_p(\cos\theta) \qquad (V.3.14)$$

Nous pouvons écrire :

$$A_r(\theta) = -\ i \int_{-\infty}^{+\infty} p\left\{\exp(2i\ \delta_r(p)) - 1\right\} E_p(\cos\theta)\ dp \qquad (V.3.15)$$

$E_p(\cos\theta)$ oscille asymptotiquement comme $\exp(i\ p\ \theta)$. Pour évaluer l'intégrale (V.3.15), nous déformerons le contour pour Re $p < 0$ vers le haut, et pour Re $p > 0$ nous le déformerons de façon que $p/kb(p)$ soit réel. Soit $C$ le contour ainsi obtenu. La contribution du terme 1 est nulle sur $C$, et nous n'en tiendrons plus compte.

L'intérêt du contour $C$ est qu'il coupe tous les points de phase stationnaire, à cause de la réalité de la fonction $\Phi'$ dans (V.3.7). Soit $p_s$ un point de phase stationnaire, $p_s$ est solution de :

$$\delta'(p_s) + \frac{\theta}{2} = \Phi'(p_s/kb(p_s)) + \frac{\theta}{2} = 0 \qquad (V.3.16)$$

Nous désignerons par $\phi_1(p)$ la phase de $\delta(p)/\Phi$, $-\phi_2(p)$ la phase de $\delta''(p)/\Phi''$. La phase $\phi_1(p)$ donne naissance à l'absorption. Compte tenu du fait que $\Phi$ est plus grand, et que $\phi_1$ ne varie pas vite, l'absorption est plus grande pour le point de phase stationnaire intérieur que pour le point de phase stationnaire extérieur. $\phi_1(p)$ tend lentement vers zéro pour $p(ka)^{-1} \to 1$.

La phase $\phi$ de $\delta''(p)$ est égale à $-\phi_2(p_1)$ pour le point de phase stationnaire extérieur, $p_1$, et $\pi - \phi_2(p_2)$ pour le point de phase stationnaire intérieur, $p_2$, puisque les 2 valeurs correspondantes de $\Phi''$ sont des 2 côtés d'un maximum de $\Phi'$. Par ailleurs, le coefficient angulaire du chemin du col qui passe par un point donné de phase stationnaire est

$$\beta = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$$

tandis que le coefficient angulaire du contour $C$ est $\alpha = -\phi$ . Ces coefficients diffèrent par

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}$$

Pour les valeurs de $\phi_2$ que nous considérons, nous voyons que le contour $C$ est un contour de descente pour le point stationnaire extérieur, un contour de montée pour le point intérieur. Ainsi le reste qui peut venir de l'évaluation asymptotique au point intérieur peut être grand. Ceci rend l'évaluation de l'intégrale très difficile au voisinage de l'arc-en-ciel en présence d'absorption. Par contre, quand les points de phase stationnaire sont bien séparés, il est possible de déformer $C$ en un contour $C'$ qui traverse le point intérieur comme un col.

On prendra $C'$ tangente à $C$ en $(p_1)$ et parallèle à l'axe réel en $(p_2)$.

5.3.4 - **Variations de $A_r(\theta)$ avec $\theta$.**

1) Compte tenu des hypothèses faites (en particulier $M_o < \pi$), $\pi$ n'est pas une valeur particulière, et $A_r(\theta)$ doit y être très petit.

2) Aux grands angles, on doit observer la décroissance rapide du côté sombre de l'arc-en-ciel. A l'angle $\theta_o$, on obtient l'arc-en-ciel et sur le côté éclairé, les oscillations d'interférence entre les 2 points de phase stationnaire.

3) Sur le côté éclairé de l'arc-en-ciel, on peut évaluer sur le contour $C'$ la contribution de chacun des points de phase stationnaire, qui correspondent à l'angle $\theta$, par exemple, au 1er ordre en $|ka|^{-1/2}$ :

$$A_{\substack{p \text{ ext.} \\ \text{int.}}}(\theta) \sim e^{-i\frac{\pi}{4} \pm i\frac{\pi}{4}} \left(\varepsilon_2\ (p/kb(p))\right)^{-1/2} . \qquad \text{(V.3.17)}$$

$$. \ kb(p)\left[2p/kb(p)\right]^{1/2} (\sin\theta)^{-1/2} \left|\Phi''\ (p/kb(p))\right|^{-1/2}$$

$$. \exp\left[2\ i\ kb(p)\ (\varepsilon_1(p/kb(p))\ \Phi(p/kb(p)) + p/kb(p)\ \frac{a}{2})\right]$$

Si $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont les modules de $A_r$(int. et ext.) pour une valeur donnée de $\theta$, $T_1$ et $T_2$ leurs phases, la section efficace est de la forme :

$$\frac{d\sigma}{d\theta} \sim \frac{1}{4k^2}\left[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_2 \cos\,(T_1 - T_2)\right] \qquad (V.3.18)$$

Pour les potentiels couramment utilisés en physique nucléaire, (Saxon-Woods, Gaussien, etc) on peut prendre, pour rendre compte d'une absorption localisée dans la surface, une valeur constante $\varepsilon_A$ dee(p/ka) égale à $i(W/V_o)4d/a$. Pour cette valeur constante, (V.3.17) et (V.3.18) prennent une forme très simple, puisque $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. En particulier

$$T_1 - T_2 = \frac{\pi}{2} + 2ka\left[\Phi(x_1) - \Phi(x_2) + (x_1 - x_2)\,\frac{\theta}{2}\right] \qquad (V.3.19)$$

où $x_1$ et $x_2$ sont les fonctions inverses de $\Phi'(x)$ de part et d'autre de son minimum. Si $x_1$ et $x_2$ sont dans le domaine où $\Phi'(x)$ varie comme une parabole

$$T_1 - T_2 \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{3}\,ka\;\Phi'''(x_o)(\theta_o - \theta)^{3/2} \qquad (V.3.20)$$

4) Domaine de Born

Quand $\theta$ devient très petit, l'équation stationnaire (V.3.16) et le comportement de $\Phi'(x)$ pour un potentiel montrent que le point stationnaire intérieur tend vers zéro, le point stationnaire extérieur vers l'infini. Sur le côté extérieur, $\delta(p)$ devient trop petit pour que $\exp\left[2i\,\delta(p)\right]$ ait des oscillations. Les méthodes de la phase stationnaire ne peuvent convenir dans ce cas, et aucune branche de $\theta$ n'a sa contribution annulée par interférences. Par suite de la petitesse de $\delta(p)$, (V.1.19) donne le déphasage. Si on suppose que la contribution du point de phase stationnaire est détruite par l'absorption on peut calculer $A(\theta)$ dans ce domaine en supprimant $A_s(\theta)$ qui est alors négligeable, et en ne conservant que le ler ordre en $\delta(p)$. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} A_B(\theta) = 2ik\left(\dfrac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2} \displaystyle\int_o^\infty q^2\, f\left(\frac{r}{a}\right) r^2\, dr \int_o^1 J_o(x\,kr)\,\dfrac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ \\ f_B(\theta) = \left(\dfrac{\theta}{\sin\theta}\right)^{1/2} \displaystyle\int_o^\infty r^2\, V(r)\;\frac{\sin kr\,\theta}{kr\theta}\; dr \end{cases} \qquad (V.3.21)$$

qui n'est autre que la formule de Born pour r petit. Une formule un peu différente peut être trouvée au voisinage de $\pi$.

## 5.4 - Estimation des erreurs - Amélioration des résultats.

Contenu

Nous étudierons successivement l'erreur due au remplacement de la somme discrète par une intégrale et l'erreur due au déphasage JWKB. Nous donnerons la correction du ler ordre au déphasage JWKB. Nous indiquerons enfin les complications dues au voisinage du point critique.

### 5.4.1 - Erreur due au remplacement de la somme discrète

Aux énergies suffisamment éloignées de $E_c$, on peut s'abstenir d'effectuer une séparation comme celle de la section 2. Le remplacement de la somme discrète par une intégrale contient une seule erreur systématique, celle due au fait d'avoir négligé la queue de la transformée de Fourier de p (exp 2i $\delta(p)$ - 1). La forme exacte de cette queue dépend d'une façon très sensible de la structure analytique de $\eta(p)$. On pourra toutefois l'évaluer à partir de la non-analyticité au voisinage de p = 0, et de la valeur du maximum de la dérivée. Des hypothèses raisonnables montrent que $|\delta'|$ décroit de $\pi$ à $\infty$, de sorte que 2.7b est une borne pour le reste. On déduit de 2.19 que $R(\pi)$ est égal à $2\delta(\pi)$, de sorte qu'un ordre de grandeur pour l'erreur relative quand $\delta(x)$ décroit rapidement est :

$$\Delta f(\theta) \;/\; f(\theta) \sim R(\pi) \;/\; R(\theta) \qquad (V.4.1)$$

Quand $\delta(x)$ décroit plus doucement, il est possible de trouver des formules plus précises à partir de 2.7. En tout cas, l'erreur est négligeable si $\theta$ n'est pas dans le voisinage immédiat de $\pi$, et elle peut être vue immédiatement sur les courbes expérimentales.

### 5.4.2 - Erreur sur le déphasage

Nous en donnerons 2 méthodes d'évaluation. La première, que nous traitons seulement pour un point tournant du ler ordre, peut être très facilement étendue pour un point tournant du 3ème ordre. La seconde permet d'évaluer facilement la correction dans le ler cas.

Dans les 2 cas, à p donné, nous comparons l'équation de Schrödinger exacte et une équation approchée, la différence étant une fonction bornée $R_p(z)$. A partir de $R_p(z)$ nous calculerons l'erreur par une généralisation triviale de la méthode utilisée par Chadan et Guennéguès [39] pour calculer l'amplitude partielle.

Ecrivons l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$\frac{d^2v}{dz^2} + K(z)\, v(z) = P(z)\, v(z) \qquad (V.4.2)$$

où les solutions de l'équation non perturbée (P(z) = 0) sont connues. La méthode de Chadan-Guennéguès donne des majorations convergentes pour les suites d'itération de la solution de l'équation suivante :

$$a(\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}} P(z) \left[ t(z) + i a(z)\, w(z) \right]^2 dz \qquad (V.4.3)$$

où $a(\bar{z})$ est la variation de l'amplitude de diffusion produite par $P(z)\ Y(\bar{z} - z)$, $t(z)$ et $w(z)$ sont les solutions régulière et stationnaire de l'équation non perturbée avec des normalisations convenables. Si on a sur le contour d'intégration de (V.4.3) les bornes suivantes :

$$\begin{cases} |t(z)| < U(z) \\ |w(z)| < U(z)\ Q(z) \end{cases} \qquad (V.4.4)$$

où U et Q sont positives, et où $Q \geq 1$ ne croit pas avec z, alors

$$|a(\bar{z})| < \frac{I_r(\bar{z})}{1 - I_r(\bar{z})} \qquad \text{pourvu que } I_r(\bar{z}) < 1 \qquad (V.4.5)$$

$I_r(\bar{z})$ est défini par :

$$I_r(\bar{z}) = \int_{o(\Gamma)}^{\bar{z}} |P(z)|\ U^2(z)\ Q(z)\ ds \qquad (V.4.6)$$

où s est l'abscisse curviligne sur $\Gamma$.

Dans ces conditions, le développement converge, et son 1er terme, le terme de Born, donne une bonne approximation pour $a(\infty)$ quand $I_r(\infty)$ n'est pas trop voisin de 1.

$$a_1(\infty) = \int_0^{\infty} P(z)\ t^2(z)\ dz \qquad (V.4.7)$$

Nous allons utiliser cette technique dans les 2 méthodes suivantes :

1) Première méthode

L'équation non perturbée est (V.1.4), sauf que $\omega(z)$ est remplacé par $\mathcal{R}(z) = \omega(z) - (4z^2)^{-1}$. Dans le cas d'un point tournant simple ($\beta = 1/2$, $E - E_c >> 0$), t et w sont donnés par (V.4.8) sur le côté extérieur du point tournant et (V.4.9) sur le côté intérieur :

$$\begin{aligned} t(z) &= (\pi/6)^{1/2}\ (\nu\Phi)^{-1/2}\ u^{1/2} \left[ J_{1/3}(u) + J_{-1/3}(u) \right] \\ w(z) &= (\pi/2)^{1/2}\ (\nu\Phi)^{-1/2}\ u^{1/2}\ i\ e^{i\pi/6}\ H^{(1)}_{1/3}(u) \end{aligned} \qquad (V.4.8)$$

$$t(z) = (2\pi)^{-1/2} \left(\frac{u}{\nu\Phi} e^{-i\pi}\right)^{1/2} K_{1/3}(u e^{-3i\pi/2})$$

$$w(z) = (2\pi)^{-1/2} \left(\frac{u}{\nu\Phi} e^{-i\pi}\right)^{1/2} \left\{ I_{1/3}(u e^{-3i\pi/2}) + \pi^{-1} e^{i\pi/6} K_{1/3}(u e^{-3i\pi/2}) \right\} \qquad (V.4.9)$$

Soit $\Phi_o$ la fonction $\Phi$ de (V.1.4) qui correspond à la particule libre et $z_1$ et $z_2$ deux valeurs de z telles que, pour $z < z_1$, $\Phi^2(z)$ soit à peu près le terme centrifuge et, pour $z > z_2$, la fonction $\Phi_o^2(z)$. Nous imposerons à $z_1$ et $z_2$ d'être hors le domaine du point tournant, donc :

$$|u(z_{1,2})| \gg 1 \qquad (V.4.10)$$

On définira aussi $z_o^+$ et $z_o^-$ par les relations

$$|u(z_o^+)| = |u(z_o^-)| = 1 \qquad z_o^- < z_o^+$$

et on notera $s_o$ la dérivée de $\Phi^2$ par rapport à z au point $z_o$. Nous pouvons choisir Q et U de la manière suivante, à un facteur constant voisin de 1 près :

$$\begin{cases} z < z_o^- & U(z) = \frac{1}{2} |\nu\Phi|^{-1/2} e^{-|u|} & Q(z) = e^{2|u|} \\ z \in (z_o^-, z_o^+) & U(z) = s_o^{1/6} \gamma^{-1/3} & Q(z) = A \gtrsim 1 \\ z > z^+ & U(z) = (\nu\Phi)^{-1/2} & Q(z) = 1 \end{cases} \qquad (V.4.11)$$

Il est possible alors de prouver que les contributions à $I_r(\infty)$, soient $I_1$ et $I_3$, qui proviennent respectivement de $z < z_o^-$ et $z > z_o^+$ ont les ordres de grandeur suivants :

$$\begin{cases} I_1 \lesssim \frac{5}{144} |u(z_1)|^{-1} \\ I_3 \lesssim \frac{5}{36} |u(z_2)|^{-1} + O(z_2 - z_o)^{-1} \end{cases} \qquad (V.4.12)$$

Un choix convenable de $z_1$ et $z_2$ rend possible de donner à $I_1$ et $I_3$ le même ordre que $I_2$ :

$$I_2 = s_o^{-1/3} \nu^{-2/3} \int_{z_1}^{z_2} |\mathcal{R}(z)| \, dz \qquad (V.4.13)$$

Définissons une fonction $s(z) = \Phi^2(z)\ (z - z_o)^{-1}$, on peut évaluer $\omega(z)$ à partir de $s(z)$ :

$$\omega(z) \sim \frac{3}{14}\ s''(z)\ (s(z))^{-1} - \frac{9}{35}\ (s'(z))^2/(s(z))^2 \qquad (V.4.14)$$

La formule (V.4.13) montre que pour $\Phi^2(z)$ donné, le reste décroit comme $\nu^{-2/3}$, tandis que (V.4.14) montre que pour $E >> E_c$, le reste croit comme $\left[s(z_o)\right]^{-4/3}$.

Pour $E >> E_c$, $I_2$ est petit et l'approximation de Born est valable. Comme le terme de Born (V.4.7) est linéaire en $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}$ indépendant du potentiel sauf sur l'intervalle $(z_1, z_2)$, il est possible de limiter la sommation à cet intervalle. Si on remplace $\mathcal{R}(z)$ par son expression dans le terme de Born, on obtient, avec quelques calculs, la même formule que (V.4.25) ci-dessous.

2) Deuxième méthode

Si une fonction $\Phi_1(z)$ est holomorphe et ne s'annule pas dans une bande $K$ qui inclut l'axe réel positif, la fonction $u(z)$ définie par :

$$u(z) = \int_{z_o}^{z} (\tau - z_o)^{1/2}\ \Phi_1(\tau)\ d\tau \qquad (V.4.15)$$

est une fonction analytique "simple" dans $K^+$, obtenue à partir de $K$ en coupant à partir de $z_o$. Si $\Phi_1$ est définie comme dans la section 5.1, une bande qui inclut l'axe réel positif et l'axe imaginaire négatif correspond à $K^+$ dans le plan des u.

Ecrivons l'équation de Schrödinger sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left[k^2 a^2 \phi^2(z) + \chi(z)\right] y = 0 \qquad (V.4.16)$$

où $\phi(z)$ satisfait les conditions données dans la section 1. $\chi(z)$ est analytique dans $K$, sauf peut être à l'origine. Nous indiquerons par une barre toutes les quantités reliées à l'équation de la particule libre, et introduirons une nouvelle variable $\bar{z}$ par :

$$u = \int_{\bar{z}_o}^{\bar{z}} \bar{\phi}(\tau)\ d\tau = \int_{z_o}^{z} \phi(\tau)\ d\tau \qquad (V.4.17)$$

et une nouvelle fonction $y_1(\bar{z})$ par

$$y_1(\bar{z}) = \left[\bar{\phi}(\bar{z})\right]^{-1/2} \left[\phi(z)\right]^{1/2}\ y(z) = \left(\frac{d\bar{z}}{dz}\right)^{1/2} y(z) \qquad (V.4.18)$$

Le lemme précédent nous montre que ceci peut être fait sans ambiguïté. Il est facile de montrer que $y_1(\bar{z})$ est solution de

$$\frac{d^2 y_1(\bar{z})}{d\bar{z}^2} + \left[ k^2 a^2 \bar{\phi}^2(\bar{z}) + \frac{1}{2}\left\{ z, \bar{z} \right\} + \chi(z) \left( \frac{dz}{d\bar{z}} \right)^2 \right] y_1(\bar{z}) = 0 \qquad (V.4.19)$$

Nous poserons [40]

$$\chi(z) = \frac{1}{4} z^{-2} \qquad \bar{\chi}(\bar{z}) = \frac{1}{4} \bar{z}^{-2} \qquad (V.4.20)$$

de sorte que

$$\bar{\phi}(\bar{z}) = (1 - \lambda_o^2 / \bar{z}^2)^{1/2}$$

Avec les notations de la section 1, (V.4.17) s'écrira, pour une valeur donnée de $\lambda_o$, comme :

$$\begin{cases} (a) \quad \displaystyle\int_{\lambda_o}^{\bar{z}} (\lambda^2 - \lambda_o^2)^{1/2} H'(\lambda)\, d\lambda = \int_{\bar{z}}^{\lambda(z)} (\lambda^2 - \lambda_o^2)^{1/2} (\psi'(\lambda)/\psi(\lambda))\, d\lambda \\ (b) \quad \displaystyle\int_{\bar{z}}^{\lambda_o} (\lambda_o^2 - \lambda^2)^{1/2} H'(\lambda)\, d\lambda = \int_{\lambda(z)}^{\bar{z}} (\lambda_o^2 - \lambda^2)^{1/2} \psi'(\lambda)/\psi(\lambda)\, d\lambda \end{cases} \qquad (V.4.21)$$

De l'étude de $H(\lambda)$ et de (III.4.21) on déduit que, pour un potentiel borné :

$$\begin{cases} (a) \quad dz/d\bar{z} \to \text{cte} + O(\bar{z}^{-2}) \qquad \text{pour } \bar{z} \to 0 \\ (b) \quad \lambda(z) - \bar{z} \to z - \bar{z} \to -\Delta \qquad \text{pour } \bar{z} \to +\infty \\ (c) \quad \Delta = -\displaystyle\int_{\lambda_o}^{\infty} (\lambda^2 - \lambda_o^2)^{1/2} H'(\lambda)\, d\lambda = \int_{\lambda_o}^{\infty} \lambda\, (\lambda^2 - \lambda_o^2)^{-1/2} H(\lambda)\, d\lambda \end{cases} \qquad (V.4.22)$$

Si on utilise ces propriétés et les relations (V.4.18), on voit que la solution régulière de (V.4.16) est reliée à celle de (V.4.9) et que

$$y(z) - y_1(\bar{z}) \to 0 \text{ quand } \bar{z} \to +\infty \qquad (V.4.23)$$

Par suite, si $y_1(\bar{z})$ se comporte asymptotiquement comme $\sin(ka\,\bar{z} + \rho)$, $y(z)$ se comporte asymptotiquement comme $\sin(ka\,z + ka\,\Delta + \rho)$. Le déphasage de $y(z)$ est donc égal au déphasage semi-classique $ka\,\Delta$ plus le déphasage $\rho_1$ de la solution régulière de (V.4.19), qui diffère de l'équation de la particule libre par

$$P(\bar{z}) = -\frac{1}{4}\ z^{-2}\ (dz/d\bar{z})^2 + \frac{1}{4}\ (\bar{z})^{-2} - \frac{1}{2}\left\{z,\bar{z}\right\} \qquad (V.4.24)$$

Comme la forme asymptotique des fonctions de Bessel solutions de l'équation de la particule libre est la même que (V.4.8) et (V.4.9), avec l'argument u approprié, la recherche des conditions d'application de la méthode de Chadan Guennéguès est la même que celle faite précédemment, sauf que la perturbation tend ici vers zéro comme le potentiel quand $\bar{z} \to \infty$ et est bornée pour $\bar{z} \to 0$. La même conclusion que précédemment est valable : l'erreur est bornée par un terme d'ordre $(ka)^{-2/3}$. Mais la différence entre les erreurs dues à l'application de la méthode de Langer aux équations avec ou sans potentiel est contenue ici dans la structure même de la méthode :tant que l'approximation de Born est valable, il est facile de montrer que les deux méthodes sont équivalentes. Dans ce domaine, la correction de Born au déphasage est égale, pour une onde partielle donnée, à

$$\rho_1(p) = -\frac{\pi}{2}\int_0^\infty J^2_{\ell+1/2}\ (ka\ \bar{z})\ P(\bar{z})\ \bar{z}\ d\bar{z} \qquad (V.4.25)$$

Il est difficile d'évaluer $\rho_1(p)$ plus précisément. Multiplions le potentiel par un facteur de développement $\chi$. Nous pouvons chercher à obtenir une valeur approchée de $\rho_1(p)$ en conservant seulement les termes du 1er ordre en $\chi$. Une estimation rapide de $H'(\lambda)$ au voisinage de son minimum montre que le 2ème ordre de la solution de (V.4.21) est une petite fraction ($\sim\frac{1}{6}\ |\lambda_M H'(\lambda_M)|$) du premier, et si $|H'|$ est suffisamment petit, on peut penser que cette approximation est bonne dans tout le domaine où l'approximation JWKB du 1er ordre s'applique. Mais on peut montrer que les développements en puissances de $\chi$ du déphasage, du déphasage JWKB ($ka\ \Delta$) et du déphasage additionnel $\rho$, convergent au voisinage de $\chi = 0$, et, en égalant les coefficients de $\chi$, on en déduit que la correction du 1er ordre est juste la différence entre le terme de Born et l'expression du 1er ordre du déphasage. Nous en concluons que garder seulement les termes linéaires en $\chi$ est une amélioration pour les petits déphasages, mais ne vaut rien pour les déphasages d'ordre 1, pour lesquels l'approximation de Born est mauvaise.

Pour obtenir une autre estimation de $\rho_1(p)$, nous pouvons supposer que $P(\bar{z})$ est elle-même une fonction douce de p, de sorte que l'on pourra utiliser, au lieu de (V.4.25), l'estimation JWKB de 1er ordre :

$$\rho_2(p) = \frac{-(ka)^{-1}}{2}\int_{\lambda_0}^\infty \bar{z}(\bar{z}^2 - \lambda_0^2)^{-1/2}\ P(\bar{z})\ d\bar{z} \qquad (V.4.26a)$$

Pour transformer (V.4.26) rappelons l'identité suivante valable pour 2 fonctions analytiques et"simples" :

$$\left\{ y,x \right\} = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \left\{ g,f \right\} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left\{ g,y \right\} + \left\{ f,x \right\} \qquad (V.4.27)$$

qui peut facilement se déduire de (BI2)

De (V.4.27), (V.4.24) et (V.4.26a) nous déduisons [41]

$$\rho_2(p) = \frac{(ka)^{-1}}{4} \int_{\bar{z}_o}^{\infty} \left\{ \frac{\text{Log } z,\ \text{Log } \bar{z}}{\bar{\phi}\ (\bar{z})} \right\} \frac{d\bar{z}}{\bar{z}^2} \qquad (V.4.26b)$$

Posons alors

$$\begin{cases} \text{Log } z = z^* & du/dz^* = \phi^*(z^*) \\ \text{Log } \bar{z} = \bar{z}^* & du/d\bar{z}^* = \bar{\phi}^*(\bar{z}^*) \end{cases}$$

Nous sommes ainsi conduits [42] à l'évaluation de la quantité

$$\lim_{\bar{z}^* \to \bar{z}_o^*} \int_{\bar{z}^*}^{\infty} \frac{\left\{ u,\bar{z}^* \right\}}{\bar{\phi}^*(\bar{z}^*)} d\bar{z}^* - \int_{z^*}^{\infty} \frac{\left\{ u,z^* \right\}}{\phi^*(z^*)} dz^* \qquad (V.4.28a)$$

Les 2 intégrales divergent quand $\bar{z}^* \to \bar{z}_o^*$, à cause du zéro de $\bar{\phi}^2(\bar{z}^*)$. Posant

$$\Phi(z^*) = \phi^{2*}(z^*) \qquad \bar{\Phi}(\bar{z}^*) = \bar{\phi}^{2*}(\bar{z}^*)$$

nous pouvons écrire (V.4.28) de la façon suivante :

$$\frac{1}{6} \int_{\bar{z}_o}^{\infty} d\bar{z}^*\ \bar{\Phi}^{-1/2}\ \frac{d}{d\bar{z}^*}\ \left(\frac{\bar{\Phi}''}{\bar{\Phi}'}\right) \qquad (V.4.28b)$$

$$- \frac{1}{6} \int_{z_o^*}^{\infty} dz^*\ \Phi^{-1/2}\ \frac{d}{dz^*}\ \left(\frac{\Phi''}{\Phi'}\right)$$

$$+ \frac{1}{6} \lim_{\bar{z}^* \to \bar{z}_o^*} \left\{ \left[ \frac{5}{2}\ \frac{\bar{\Phi}'}{\bar{\Phi}^{3/2}} - \frac{\bar{\Phi}''}{\bar{\Phi}^{1/2}\ \bar{\Phi}'} \right]_{\bar{z}^*}^{\infty} - \left[ \frac{5}{2}\ \frac{\Phi'}{\Phi^{3/2}} - \frac{\Phi''}{\Phi^{1/2}\ \Phi'} \right]_{z^*}^{\infty} \right\}$$

Si maintenant on utilise l'expression de u analogue à (V.4.17) pour exprimer $\bar{z}^* - \bar{z}_o^*$ comme un développement en puissance de $(\bar{z} - \bar{z}_o)$, les 2 premiers ordres montrent que la quantité entre crochets s'annule dans (V.4.28b). En écrivant alors explicitement les fonctions $\Phi$, et en revenant aux notations du chapitre I, nous voyons que la 1ère intégrale dans (V.4.28b) s'annule et nous obtenons :

$$\rho_2 = -\frac{(ka)^{-1}}{24} \int_{z_o}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{\lambda^2(z)-\lambda_o^2}} \frac{d}{dz}\left[\frac{z\left(\frac{d^2(\lambda^2)}{d\lambda^2}\right)}{(d/dz)(\lambda^2)}\right] \qquad \text{(V.4.29a)}$$

ou

$$\rho_2 = -\frac{(ka)^{-1}}{24} \int_{\lambda_o}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\lambda_o^2}} \frac{d}{d\lambda}\left[\frac{\psi(\lambda)}{\psi'(\lambda)}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{\psi''}{\psi'}\right)\right] \qquad \text{(V.4.29b)}$$

ou

$$\rho_2 = -\frac{(ka)^{-1}}{24} \int_{\lambda_o}^{\infty} \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-\lambda_o^2}} \frac{d}{d\lambda} \frac{3\lambda\, H'(\lambda) + \lambda^2 H'' - 2\lambda^2\, H'^2}{\left[1 - \lambda\, H'(\lambda)\right]^2} \qquad \text{(V.4.29c)}$$

Ces formules donnent la correction au ler ordre [43] des déphasages.

# CHAPITRE VI

## APPLICATIONS DE LA THEORIE SEMI-CLASSIQUE AU PROBLEME INVERSE

Ce chapitre décrit diverses applications de la théorie semi-classique au problème inverse pris au sens large, c'est-à-dire à la description des relations qui décrivent tel ou tel trait du potentiel à partir des sections efficaces. Il est divisé en 4 sections. Dans la première, on étudie le problème inverse au sens restreint, c'est-à-dire qu'on envisage successivement du point de vue théorique et du point de vue pratique la construction du potentiel à partir de la section efficace. Dans la seconde, une loi empirique remarquée depuis longtemps sur les distributions angulaires de la section efficace de diffusion élastique et sur les courbes de polarisation est démontrée dans un large intervalle d'énergie, et ses limitations sont indiquées. Dans la troisième section, nous montrons comment la présence d'absorption peut enlever toute possibilité d'obtenir une évaluation précise du potentiel près de $r = 0$ aux énergies hypocritiques. Enfin, dans la dernière section, nous indiquerons très sommairement d'autres applications.

### 6.1 - Le problème inverse dans la théorie semi-classique

Dans le contexte de la théorie semi-classique, le problème inverse peut être considéré de deux points de vue, le premier théorique, le second pratique.

#### Point de vue théorique -

Le problème inverse a-t-il une solution, et une seule, dans le cadre de la théorie semi-classique de la diffusion ? L'analyse des méthodes utilisées permet de répondre affirmativement à cette question. En effet, une fois l'amplitude de diffusion construite à partir de la section efficace par la méthode que nous avons indiquée dans l'introduction de la première partie de ce travail, le problème inverse se réduit à 2 déterminations successives - celle d'une amplitude de diffusion interpolée des amplitudes partielles physiques puis la détermination du potentiel à partir de cette interpolée. Or ces 2 étapes sont simples dans la théorie semi-classique de la diffusion.

1) Détermination de l'interpolée

Une des simplifications essentielles de la théorie semi-classique consiste en la transformation de la somme discrète de Faxen-Holtzmark en intégrale. Nous avons vu que la validité de cette simplification est liée au comportement asymptotique de

$$\bar{\eta}(p) = p\,\eta(p) = p\left[e^{2i\delta(p)} - 1\right] \qquad \text{(VI.1.1)}$$

L'obtention des formules du chapitre II, section 2, où la transformation a été faite, suppose que l'on néglige la partie de la transformée de Fourier au-delà de $\pi$.

Comme l'amplitude de diffusion JWKB peut se mettre sous la forme d'une fonction paire de $\phi$ (avec éventuellement une singularité logarithmique dans les dérivées secondes à l'origine) on peut d'ailleurs se limiter à la transformée sinusoïdale $\delta(x)$ de $\bar{\eta}(p)$, et supposer que $\delta(x)$ est nulle au-delà de $\pi$. Il revient au même de dire que l'on approche $\bar{\eta}_{JWKB}(p)$ par $\bar{\eta}_I(p)$ qui, connue pour $p = \ell + 1/2$, est prolongée dans le plan des p en une fonction entière de p, d'ordre 1, de type $\pi$, bornée sur l'axe réel, et impaire. Une telle fonction est entièrement déterminée par sa valeur aux points $p = \ell + 1/2$, et peut être calculée par exemple à l'aide de la formule d'interpolation de Lagrange Valiron [44]:

$$f(z) = f'(o)\,\sin\pi z + f(o)\,\frac{\sin\pi z}{\pi z} + \frac{z\,\sin\pi z}{\pi}\,{\sum_{-\infty}^{+\infty}}'\,\frac{(-1)^n\,f(n)}{n(z-n)} \qquad \text{(VI.1.2)}$$

où le signe ' indique qu'on a exclu n = 0 de la sommation, et où on posera :

$$z = \ell = p - 1/2$$

$$f(z) = \bar{\eta}\,(p)$$

En soustrayant f(-1/2), qui doit être nulle, et en tenant compte de la parité de $\bar{\eta}_I(p)$, on obtient :

$$\bar{\eta}_I(p) = \sum_{o}^{\infty} \bar{\eta}(\ell+1/2)\left[\frac{\sin(p-\ell-1/2)\pi}{\pi(p-\ell-1/2)} - \frac{\sin(p+\ell+1/2)\pi}{\pi(p+\ell+1/2)}\right] \qquad \text{(VI.1.3)}$$

ou encore, en prolongeant en $\lambda$ la variable discrète $\ell$

$$\eta_\lambda^{(I)} = (e^{2i\delta\lambda} - 1) = \frac{\sin\lambda\pi}{\pi}\sum_{o}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda-\ell} - \frac{1}{\lambda+\ell+1}\right)(e^{2i\delta\ell} - 1) \qquad \text{(VI.1.4)}$$

On pourrait obtenir les mêmes relations en remarquant que, puisque $\delta(x)$ est nul pour $x > \pi$, les coefficients $(\ell + 1/2)\left[e^{2i\delta_\ell} - 1\right]$ sont les coefficients de Fourier de $\delta(x)$, de sorte que

$$\delta(x) = 2\pi^{-1} \sum_{o}^{\infty} (\ell + 1/2)\left[e^{2i\delta_\ell} - 1\right] \sin(\ell + 1/2)x \qquad \text{(VI.1.5)}$$

et

$$\overline{\eta}_I(p) = \int_o^{\pi} \delta(x) \sin px \, dx \qquad \text{(VI.1.6)}$$

Il est facile de retrouver (VI.1.3) à partir de (VI.1.5) et (VI.1.6). Il est possible d'autre part de déduire de (VI.1.4) et de l'expression des amplitudes partielles en fonction de l'amplitude de diffusion une formule qui définit $\eta_I(p)$ à partir de l'amplitude de diffusion. Il suffit en effet d'insérer la relation :

$$e^{2i\delta_\ell} - 1 = \frac{1}{2} \int_o^{\pi} A(\theta) P_\ell(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \qquad \text{(VI.1.7)}$$

dans (VI.1.4) et d'utiliser la formule de Dougall pour obtenir

$$e^{2i\delta_\lambda^{(I)}} - 1 = \frac{1}{2} \int_o^{\pi} A(\theta) P_\lambda(\cos\theta) \sin\theta \, d\theta \qquad \text{(VI.1.8)}$$

Ainsi l'interpolation qui doit être utilisée dans la théorie semi-classique de la diffusion s'obtient en remplaçant dans la relation de définition des amplitudes partielles les polynômes de Legendre par leur interpolée naturelle. Cette interpolation n'est évidemment par carlsonienne.

Signification physique de l'approximation

La fonction $\eta_I(p)$ est entière, donc finie à distance finie, ce qui est du reste évident sur la formule (VI.1.6). Ainsi, le prolongement des amplitudes partielles compatible avec les méthodes semi-classiques ne présente pas de pôle de Regge. Cela se comprend : un pôle de Regge induirait dans la queue de $\delta(x)$ un terme d'ordre $Cx^{-1}$, non nul. La théorie semi-classique de la diffusion, du moins dans le domaine non critique, est donc une théorie où l'influence des pôles de Regge sur la queue de l'amplitude de diffusion peut être négligée.

2) Détermination du potentiel à partir de l'interpolée

Dès 1955, J.A. Wheeler [24] a indiqué que ce problème inverse a une solution et une seule dans le cadre de l'approximation JWKB. Il est facile de s'en rendre compte sur la formule (V.1.17) pour un potentiel réel. Si nous connaissons $\delta(p)$ et si, choisissant une valeur de a,

nous écrivons $\delta(p)$ sous la forme :

$$\delta(p) = ka\ \Phi(p/ka) \tag{VI.1.9}$$

on trouve, en inversant (V.1.17) :

$$H(\lambda) = -\,2\pi^{-1} \int_{\lambda}^{\infty} \Phi'(x)\, \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \lambda^2}} \tag{VI.1.10}$$

et $H(\lambda)$, d'après (V.1.15) et (V.1.6) est lié au potentiel par les relations :

$$\begin{cases} G(r) = \left[1 - E^{-1}\ V(r)\right]^{1/2} = e^{H(\lambda)} \\ \\ \lambda = \dfrac{r}{a}\ G(r) \end{cases} \tag{VI.1.11}$$

Le choix de a est parfaitement arbitraire.

Pour s'en assurer, on peut choisir tout d'abord $a = k^{-1}$, longueur d'onde de la particule incidente, et ensuite a quelconque. En indiçant 0 les quantités dans le 1er cas, on doit résoudre

$$G_o(r) = e^{H_o(\mu)} \qquad\qquad G(r) = e^{H(\nu)}$$

$$\mu = kr\ G_o(r) \qquad\qquad \nu = \frac{kr}{ka}\ G(r)$$

et il résulte de (VI.1.10) que

$$H(\nu) = H_o(\nu\ ka)$$

de sorte que $\mu = \nu ka$ et $G(r) = G_o(r)$.

Il sera bon de choisir a de façon que $\Phi'(1)$ soit maximum. ka est ainsi l'ordre de grandeur du nombre de valeurs de $\ell$ qui donne une contribution importante à la section efficace, et a est le noyau d'action du potentiel. Pourvu que $\Phi'(1)$ soit petit par rapport à ka, $(ka)^{-1}$ est un paramètre asymptotique commode.

Les relations (VI.1.8), (VI.1.10) et (VI.1.11) déterminent complètement, et sans difficulté, le potentiel à partir des déphasages physiques, dans le domaine non critique. Il est possible d'obtenir une précision plus grande en utilisant la relation (V.4.29c) qui donne la première correction au déphasage $\delta(p)$ dans le domaine non critique :

$$\rho_2 = \frac{-(ka)^{-1}}{24} \int_{\lambda_o}^{\infty} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \lambda_o^2}} \frac{d}{\lambda d\lambda} \frac{3\lambda\, H'(\lambda) + \lambda^2 H''(\lambda) - 2\lambda^2\, H'^2(\lambda)}{\left[1 - H'(\lambda)\right]^2}$$

(VI.1.12)

Pour en tenir compte, on commencera par déterminer une fonction $\overline{H}(\lambda)$ par la formule (VI.1.10) à partir du déphasage interpolé, et on résoudra ensuite :

$$ka\, \overline{H}(\lambda) = ka\, H(\lambda) - \frac{(ka)^{-1}}{24} \frac{d}{\lambda d\lambda} \left[ \frac{3\lambda\, H'(\lambda) + \lambda^2\, H''(\lambda) - 2\,\lambda^2\, H'^2(\lambda)}{\left[1 - \lambda\, H'(\lambda)\right]^2} \right] \quad \text{(VI.1.13)}$$

Dans le domaine non critique, une itération au ler ordre doit suffire. De trop grandes valeurs de H' ou H" ($\lambda$) sont en effet signe qu'on approche le point critique, des valeurs infinies qu'on est dans le domaine critique. Cette correction est très simple à faire, et l'on voit qu'elle est d'ordre $(ka)^{-2}$ par rapport au terme principal, avec en plus un facteur 1/24. Pour des valeurs de ka qui dans les cas les plus scabreux sont de 6 ou 7 dans le domaine non critique la correction est de l'ordre de quelques pour cents, et le terme suivant négligé peut être considéré comme parfaitement négligeable par rapport aux erreurs expérimentales.

3) Erreur systématique de la méthode

La méthode semi-classique, sous la forme considérée, introduit une seule erreur systématique, puisqu'on peut toujours améliorer le déphasage JWKB par l'adjonction d'ordres supérieurs, celle qui est liée au remplacement de la série par une intégrale, ou, dans le problème inverse, au choix du déphasage interpolé. Cette erreur est liée à l'importance de la queue de $\delta(x)$ au-delà de $\pi$. Nous avons vu au chapitre précédent comment on peut effectuer une évaluation de l'erreur en connaissant le potentiel. On désire ici en avoir une estimation, même grossière, à partir des résultats expérimentaux. Pour cela nous devons faire une pétition de principe : admettre que les propriétés de $\delta(x)$ sont continues au-delà et en deça de $x = \pi$. Cette condition n'est pas une nécessité physique : c'est ainsi que la transformée de Fourier (exponentielle) de l'amplitude de diffusion coulombienne est nulle au-delà de $\pi$. Mais le potentiel coulombien est un cas très particulier. La décroissance la plus faible qu'on puisse attendre de la queue de $\delta(x)$ est une décroissance en $x^{-1}$. C'est celle qui correspond à une fonction $H(\lambda)$ non paire ou bien encore à un pôle de Regge. Or $\delta(x)$ est reliée à la section efficace par les relations :

$$\sigma(\theta) = \frac{\lambda^2}{4} |A(\theta)|^2 = \lambda^2 \left| \int_o^{\pi} \delta(x) \sum_{\ell} \sin\left(\ell + 1/2\right)x\, P_{\ell}(\cos\theta)\, dx \right|^2$$

ou $$\sigma(\theta) = 2\pi^2 \left| \int_\theta^\pi \delta(x)\ (\cos\theta - \cos x)^{-1/2}\ dx \right|^2 \qquad \text{(VI.1.14)}$$

et $$s(x) = \frac{\pi^{-1}}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} \left\{ \int_x^\pi (\cos x - \cos\theta)^{-1/2} \sin\theta\ A(\theta)\ d\theta \right\} \qquad \text{(VI.1.15)}$$

qu'on peut facilement déduire de (VI.1.5) et (VI.1.7)

Sur la plupart des courbes expérimentales aux énergies convenables, et, après séparation, éventuellement, de la partie coulombienne, la section efficace décroit beaucoup plus vite que $\theta^{-1}$ en fait, quasi exponentiellement . On obtient donc sûrement une forte surestimation de la partie asymptotique de $\delta(x)$ en la prolongeant par une hyperbole au-delà de $\pi$, soit

$$|s(x)|_{x>\pi} \lesssim C_o\, x^{-1}$$

où $$|C_o| = |\pi\ \delta(\pi)| = \pi^{-1} \left[\sigma(\pi)\right]^{1/2}$$

Evidemment cette partie asymptotique pourrait ne pas être monotone - elle l'est sûrement à l'infini, du moins si elle décroit aussi lentement que $x^{-1}$, car c'est une condition d'existence de $s(x)$. L'erreur sur $\delta'(p)$ peut être obtenue en dérivant :

$$\overline{\eta}(p) = \int_o^\infty s(x) \sin px$$

et en estimant les 2 membres - on trouve

$$|\Delta\ \delta'(p)| \sim p^{-1}\ C_o \int_\pi^\infty x^{-1}\ dx \cos px \sim p^{-1}\ C_o \left|\frac{\sin p\pi}{p\pi}\right|$$

au moins pour $p \gtrsim 1/2$.

En reportant dans (VI.1.10), on trouve l'erreur sur $H(\lambda)$

$$\Delta \left[H_o(ka\ \lambda)\right] = \Delta\ H \sim \frac{C_o}{2ka\lambda} \frac{1}{\sqrt{k^2a^2\lambda^2 + 1}} \qquad \text{au moins pour } ka\ \lambda > 1$$

L'erreur sur le potentiel est du même ordre. Compte tenu de la petitesse des sections efficaces aux grands angles, on peut en conclure que l'erreur systématique est, en général, négligeable.

Point de vue pratique

La méthode développée plus haut permet de résoudre sans difficultés le problème inverse dans le domaine non critique. 4 questions peuvent néanmoins être posées, qui sont liées à l'imprécision des résultats expérimentaux et au caractère phénoménologique du potentiel.

1 - Comment tenir compte de l'absorption ?

La relation (VI.1.10) peut aussi bien être utilisée avec des déphasages complexes. En pratique, aux énergies non critiques, des potentiels d'absorption assez faibles suffisent. De plus en plus, pour des raisons diverses, on utilise des formes bossues dans la surface du noyau. Il en résulte que Im $\delta'(p)$ doit présenter un maximum pour $p \sim ka$. Si c'est le cas, on pourra essayer de trouver $\varepsilon$ tel que

$$\delta'(p) = \Phi'\left(\frac{p}{ka(1+i\varepsilon)}\right)$$

où la fonction $\Phi'$ est réelle pour un argument réel.

Compte tenu de la petitesse de $\varepsilon$, il suffit, pour cela, d'identifier $\delta'(p)$ et :

$$\delta'(p) \sim \Phi'\left(\frac{p}{ka}\right) - i\varepsilon \frac{p}{ka} \Phi''\left(\frac{p}{ka}\right) \qquad \text{(VI.1.16)}$$

$\varepsilon$ est de l'ordre de 1/10 à 1/15 pour les potentiels optiques couramment utilisés. Ajoutons que même si faible, l'absorption diminue suffisamment les valeurs des amplitudes partielles de petit moment angulaire pour que les erreurs sur la partie interne du potentiel soient importantes.

2 - Comment sont liées les erreurs expérimentales au potentiel ?

Nous devons seulement tenir compte ici de l'erreur sur le déphasage interpolé, puisque nous avons déjà traité de l'erreur systématique, et nous devons partir d'une certaine erreur sur l'amplitude de diffusion, puique nous avons décidé de ne pas tenir compte du pas section efficace → amplitude de diffusion. L'amplitude partielle interpolée et sa dérivée sont données, d'après (VI.1.8) par :

$$\begin{cases} \eta(p) = 1/2 \int_0^{\pi} P_{p-1/2}(\cos\theta)\, A(\theta) \sin\theta\, d\theta \\ \eta'(p) = 1/2 \int_0^{\pi} \frac{d}{dp} P_{p-1/2}(\cos\theta)\, A(\theta) \sin\theta\, d\theta \end{cases} \qquad \text{(VI.1.17)}$$

et on en déduit facilement, si $\Delta$ est l'erreur absolue, supposée indépendante de l'angle, sur $A(\theta)$, que l'erreur absolue sur $\eta'$, et celle sur $\eta$, sont majorées par $C(1 + p)^{-1/2}$

$$\begin{cases} |\Delta\eta'| < C_o\, \Delta (1 + p)^{-1/2} \\ |\Delta\eta| < C_1\, \Delta (1 + p)^{-1/2} \end{cases} \qquad \text{(VI.1.18)}$$

où les constantes $C_o$ et $C_1$, de l'ordre de l'unité, ne sont pas difficiles à déterminer. Si l'on se reporte à (VI.1.10), on voit que l'erreur sur $H(\lambda)$, et, par suite, l'erreur sur $G(r)$, sont majorées par un nombre de l'ordre de $\Delta$ pour les faibles valeurs de $\lambda$, ou les faibles valeurs de r, et de l'ordre de $\Delta\lambda^{-1/2}$ (resp $\Delta r^{-1/2}$) pour les grandes. Naturellement, ceci est une marge absolue, indépendante de tout lissage. Si on admet que tel lissage de $A(\theta)$ a une probabilité $p_1$ tel lissage plus oscillant $p_2$, etc. comme chaque lissage se traduira par un certain nombre de dérivées de $A(\theta)$ bornées, on pourra majorer l'erreur pour les grandes valeurs de p par des puissances de $p^{-1}$ égales au nombre de dérivées bornées dans le lissage considéré, et améliorer la précision.

3 - Comment savoir qu'on est dans le domaine non-critique - Les oscillations.

Si l'on se reporte à la section 2 du chapitre précédent, on voit que, sauf lorsque l'on approche le point critique, le terme $S(\theta)$ associé aux pointes trop aiguës de la fonction de déflexion est négligeable. Le domaine non critique est caractérisé donc essentiellement par une décroissance grande au voisinage de $\pi$, et les oscillations sont un signe qu'on approche du point critique. Au dessous du point critique, la diffusion spirale introduira un pic important dans la fonction de déflexion, et les oscillations seront dominantes aux grands angles. Leur module ne décroitra pas exponentiellement mais seulement comme $\theta^{-1}$. Il est donc facile de les reconnaitre. Evidemment, vu seulement sur les courbes expérimentales, il est difficile de dire quand on franchira le point critique. Mais la présence d'oscillations aux grands angles constituera un avertissement. Il faudra alors voir si l'on peut déterminer à partir de $\delta'(p)$ une fonction $H(\lambda)$ continue, ce qui constitue évidemment la pierre de touche du modèle.

La présence d'oscillations bien définies, superposées à une très forte décroissance, quasi exponentielle, du terme non oscillant, et d'amplitude décroissant en $\theta^{-1}$ ou croissant en $(\pi-\theta)^{-1}$ au voisinage de $\pi-(ka)^{-1}$ (si le pic s'étend au-delà de $\pi$), est un signe probable du voisinage du point critique, soit au-dessus, soit au-dessous. Cette remarque nous a permis de donner une interprétation très simple - et bien entendu très grossière - d'une expérience de diffusion des $\alpha$ par les noyaux de Calcium - faite par Gruhn et N.S. Wall.[45]

4 - Si l'on a un comportement "arc-en-ciel" de la section efficace, peut-on donner rapidement l'allure du potentiel ?

S'il n'y avait pas d'absorption, la réponse serait affirmative. En effet, si l'on se reporte à (IV.2.15), on voit que la pente de l'exponentielle fournit la dérivée troisième du déphasage au point arc-en-ciel - soit $\left(\frac{d^3\delta_\ell}{d\ell^3}\right)_{\ell = \ell_r}$. D'autre part, la valeur du maximum principal

fournit la valeur de la constante multiplicative de la fonction d'Airy à l'angle correspondant, donc, d'après (IV.2.17), fournit $\ell_r + 1/2$. On peut chercher ensuite à reproduire les résultats expérimentaux en allant vers les angles petits : on écrira

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{\theta} = |A_1 e^{i\psi 1} + A_2 e^{i\psi 2}|^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\psi_1 - \psi_2) \tag{VI.1.19}$$

où $$A_{1,2} = \pm (\sin\theta)^{-1/2} p_{1,2}^{1/2} \; e^{\pm i \pi/4} \left[\delta''(p_{1,2})\right]^{-1/2} \; e^{2i \delta(p_{1,2}) + p_{1,2} \frac{\theta}{2}}$$

où $p_1$ et $p_2$ sont les solutions de l'équation stationnaire de part et d'autre de l'arc-en-ciel. Les signes $\pm$ de $e^{\pm i \pi/4}$ correspondent à l'une et l'autre branche.

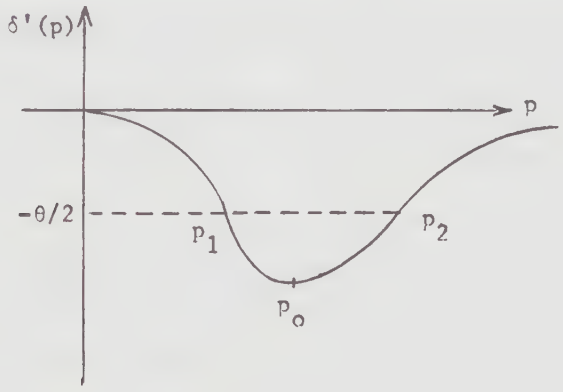


FIGURE 14

Toutes ces quantités peuvent être exprimées en fonction de $\theta$ à l'aide des courbes $p_1(y)$ et $p_2(y)$ inverses de $\delta'(p)$ de part et d'autre de $p_r$ :

$$\begin{cases} \delta'(p_{1,2}) = y \implies p_{1,2} = p_{1,2}(y) \\ \delta(p_{1,2}) = \delta(p_r) + \displaystyle\int_{-\theta_r/2}^{-\theta/2} y \, p'_{1,2}(y) \, dy \\ \delta''(p_{1,2}) = \left[ p'_{1,2}(y) \right]^{-1} = \left[ p'_{1,2}(-\theta/2) \right]^{-1} \end{cases} \tag{VI.1.20}$$

Si les oscillations sont assez rapprochées (paramètre ka très grand) on peut évaluer $A^2 = A_1^2 + A_2^2$ comme la valeur moyenne de la courbe, $A_1 A_2$ et $\psi$ comme l'amplitude et la phase des oscillations. 2 de ces quantités suffisent en principe pour déterminer $p_1$ et $p_2$ - par exemple

$$A^2 \sin\theta = \lambda^2 \left[ p_1(-\theta/2)\, p_1'(-\theta/2) + p_2(-\theta/2)\, p'_2(-\theta/2) \right]$$
$$\psi_1 - \psi_2 = \pm \pi/2 + \int_{-\theta_r/2}^{-\theta/2} \left[ p_1(y) - p_2(y) \right] dy \qquad \text{(VI.1.21)}$$

qui peut être résolu par substitution. En principe, la 3ème quantité permet de vérifier ou de lever les ambiguités. Elle devrait permettre aussi de calculer $p_1(y)$ et $p_2(y)$ même si l'absorption n'est pas négligeable - en particulier si on peut la représenter par un simple paramètre additionnel.

Les résultats sont très imprécis et on ne peut espérer obtenir mieux qu'une allure très grossière de la courbe $\delta'(p)$.

5) Règles simples

Il est possible de déduire des relations entre le déphasage interpolé et le potentiel quelques règles simples, qui permettent d'apprécier rapidement la force du potentiel à partir des déphasages ou de l'amplitude de diffusion. Nous donnerons la plus simple. Des relations (VI.1.4) ou (VI.1.8) on tire les expressions suivantes du déphasage $\delta(0) = \delta_{-1/2}$ :

$$e^{2i\delta_{-1/2}} - 1 = 2/\pi \sum_0^\infty (\ell + 1/2)^{-1} \left(e^{2i\delta_\ell} - 1\right) \qquad \text{(VI.1.23)}$$

et $e^{2i\delta_{-1/2}} - 1 = 1/2 \int_0^\pi A(\theta)\, P_{-1/2}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta = \pi^{-1} \int_0^\pi A(\theta)\, K(\sin\theta/2) \sin\theta\, d\theta$

où $K(\sin\theta/2)$ est l'intégrale elliptique complète de lère espèce. Par ailleurs, il résulte, par exemple, de (V.1.13) que :

$$\delta(0) = k \int_0^\infty \left[ \sqrt{1 - \frac{V(r)}{E}} - 1 \right] dr \qquad \text{(VI.1.24)}$$

Ces 2 relations donnent une évaluation rapide de la force du potentiel. Dans l'approximation de Born, (VI.1.24) devient simplement

$$\delta(0) \sim - (2k)^{-1} \int_0^\infty \frac{2m\, V}{\hbar^2}\, dr \qquad \text{(VI.1.25)}$$

## 6.2 - Les oscillations des distributions angulaires

Nous avons vu que la distribution angulaire de la section efficace de diffusion doit présenter des oscillations d'interférence pour les angles inférieurs à l'angle arc-en-ciel. La courbe de polarisation, dans le cas de la diffusion des particules de spin 1/2, présente également des oscillations, et on a remarqué depuis longtemps déjà que ces oscillations sont en quadrature de phase avec les précédentes. Cette loi empirique a reçu une explication en 1961 dans un article de Rodberg [46], mais G.E. Brown [46] a montré que la méthode de Rodberg n'était pas justifiée. Dans le cadre de leur modèle à couplage fort, Frahn et Venter [21] ont donné une démonstration de la loi dans un certain domaine d'énergie, mais ont montré qu'à haute énergie, et pour un potentiel spin orbite imaginaire, la loi était fausse et les oscillations sont plutôt en phase qu'en quadrature. Nous allons étudier ici les oscillations de cette espèce dans le cadre de la théorie semi-classique de la diffusion, pour voir quelle information en tirer sur le potentiel spin orbite. Le potentiel sera supposé monotone et borné, de sorte que $\Phi'(x)$ a un signe défini. Les particules incidentes ont un spin 1/2, et seul un terme spin orbite dans le potentiel rend compte des effets du spin. Avec ces hypothèses, on sait [47] que l'amplitude de diffusion, l'amplitude "spin-flip", la section efficace différentielle, la polarisation et l'angle de rotation sont donnés par :

$$\begin{cases} \alpha(\theta) = (2ik)^{-1} \sum_0^\infty \left[(\ell+1)\ \eta_\ell^+ + \ell\ \bar{\eta}_\ell\right] P_\ell(\cos\theta) \\ \beta(\theta) = (2ik)^{-1} \sum_0^\infty \left[\eta_\ell^+ - \eta_\ell^-\right] \frac{d}{d\theta}\ P_\ell(\cos\theta) \\ \sigma(\theta) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \\ P(\theta) = -i\ (\alpha\beta^* - \beta\alpha^*)\ (|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{-1} \\ \cos\beta = (|\alpha|^2 - |\beta|^2)\ /\left[(|\alpha|^2 + |\beta|^2)\ (1 - P^2)^{1/2}\right] \end{cases} \qquad \text{(VI.2.1)}$$

Nous considérerons, suivant la valeur de l'angle $\theta$, les domaines suivants :

### 1) Domaine de Born

On obtient immédiatement (cf section 3, ch. V)

$$\begin{cases} \alpha(\theta) = 1/2\ (\theta/\sin\theta)^{1/2}\ q^2 \int_0^\infty r^2 \left[f(r/a^+) + f(r/a^-)\right] \frac{\sin kr\theta}{kr\theta}\ dr \\ \beta(\theta) = 1/2\ (\theta/\sin\theta)^{1/2}\ q^2 \int_0^\infty r\ \left[f(r/a^+) - f(r/a^-)\right] c'(kr\theta)\ dr \end{cases} \qquad \text{(VI.2.2)}$$

où c(z) est donnée par

$$c(z) = \int_0^\infty J_1(zx)\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \sim \frac{\cos z}{z} \quad \text{quand } z \to \infty \qquad \text{(VI.2.3)}$$

Ces formules montrent immédiatement que la polarisation est nulle pour $\theta = 0$ et reste nulle dans tout le domaine de Born si $a^+$ et $a^-$ sont réels. Si $a^+$ et $a^-$ sont complexes, on obtient les formules habituelles.

2) Domaine de la phase stationnaire

Du fait que $\delta'(p)$ a un signe défini quel que soit $p_1$ une branche de $\theta$ n'intervient pas, de sorte que l'on peut écrire pour toutes les valeurs de $\theta$ jusqu'à l'arc-en-ciel :

$$\begin{cases} \alpha(\theta) \sim (2ik)^{-1} \int p^{1/2} \left[\eta^+(p) + \eta^-(p)\right] f(p,\theta)\, e^{ip\theta}\, dp \\ \beta(\theta) \sim i(2ik)^{-1} \int p^{1/2} \left[\eta^+(p) - \eta^-(p)\right] f(p,\theta)\, e^{ip\theta}\, dp \end{cases} \qquad \text{(VI.2.4)}$$

où $f(p,\theta)$ est une fonction douce de p, et les intégrales sont prises sur le contour approprié (e.g $C'$). Le résultat peut d'ailleurs être étendu aux termes suivants en $p^{-1}$ puisque ceux-ci ont la même forme que le premier. Quoique $p = 0$ soit un point critique pour la méthode de la phase stationnaire, on n'a pas besoin d'en tenir compte, du fait que $\Pi_0$ est nul et que l'absorption en tout état de cause, détruirait les contributions venant de ce point.

Nous pouvons maintenant construire 2 termes reliés à chacun des états de spin :

$$\begin{cases} F^+(\theta) = \alpha - i\beta \\ F^-(\theta) = \alpha + i\beta \end{cases} \qquad \text{(VI.2.5)}$$

et exprimer les quantités observables à l'aide de ces termes :

$$\begin{cases} \sigma(\theta) \sim 1/2\left\{|F^+|^2 + |F^-|^2\right\} \\ P(\theta) \sim \dfrac{|F^-|^2 - |F^+|^2}{|F^-|^2 + |F^+|^2} \\ \cos\beta \sim \dfrac{F^- F^{+*} + F^+ F^{-*}}{2\left[|F^-|^2 |F^+|^2\right]^{1/2}} \end{cases} \qquad \text{(VI.2.6)}$$

Si $\Phi^+$ et $\Phi^-$ sont les phases de $F^+$ et $F^-$, on peut aussi bien écrire :

$$\cos\beta = \cos(\Phi^+ - \Phi^-) \quad \text{ou} \quad |\beta| = |\Phi^+ - \Phi^-| \qquad \text{(VI.2.7)}$$

Ces formules conduisent a des résultats assez différents de ceux du domaine de Born ; en particulier l'absorption n'est plus nécessaire pour que $P(\theta)$ soit $\neq 0$.

3) Comparaison entre les oscillations de $\sigma(\theta)$ et $P(\theta)$

Supposons que $F^{\pm}(\theta)$ soit la somme de 2 termes $A_1$, $A_2$, calculés chacun par les méthodes asymptotiques, pour n'importe quelle composante de spin, et qu'on peut mettre sous la forme standard :

$$A_{1,2} = \alpha_{1,2}(\theta,s) \exp(i\nu T_{1,2}(\theta,s)) \qquad \text{(VI.2.8)}$$

ou s est proportionnelle à la séparation d'une composante de spin donné, $\nu$ est un grand paramètre, indépendant du spin. On va supposer que la variation de $\alpha$ ou de $T$ due au spin est petite, c'est-a-dire, plus précisément :

$$|s\,\alpha^{-1}\,\partial\alpha/\partial s| \ll 1 \qquad \text{(VI.2.9a)}$$

$$|s\,T^{-1}\,\partial T/\partial s| \ll 1 \qquad \text{(VI.2.9b)}$$

pour tout indice 1,2,+,-, et tout $\theta$.

On va supposer aussi que $s^+ = -s^-$ quoique cette hypothèse, valable dans les situations physiques, ne soit pas essentielle. Introduisons les notations suivantes :

$$\sigma^+_{1,2} = -\sigma^-_{1,2} = \nu \frac{\partial T_{1,2}}{\partial s} \operatorname{Re} s_{1,2} + (\alpha_{1,2})^{-1} \frac{\partial \alpha_{1,2}}{\partial s} \operatorname{Im} s_{1,2}$$

$$\tau^+_{1,2} = -\tau^-_{1,2} = -(\alpha_{1,2})^{-1} \frac{\partial \alpha_{1,2}}{\partial s} \operatorname{Re} s_{1,2} + \nu \frac{\partial T_{1,2}}{\partial s} \operatorname{Im} s_{1,2} \qquad \text{(VI.2.10)}$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_1^+ - \sigma_2^+ \qquad\qquad \bar{\tau} = \tau_1^+ + \tau_2^+$$

On obtient sans peine :

$$\frac{1}{2}\left\{|F^-|^2 + |F^+|^2\right\} = |A_1|^2 \ \mathrm{ch}\ 2\tau_1^+ + |A_2|^2 \ \mathrm{ch}\ 2\tau_2^+$$
$$+ 2 A_1 A_2\left[\mathrm{ch}\ \bar{\tau}\ \cos\bar{\sigma}\ \cos\nu(T_1 - T_2) + \mathrm{sh}\ \bar{\tau}\ \sin\bar{\sigma}\ \sin\nu(T_1 - T_2)\right] \qquad \text{(VI.2.11a)}$$

$$\frac{1}{2}\left\{|F^-|^2 - |F^+|^2\right\} = |A_1|^2 \ \mathrm{sh}\ 2\tau_1^+ + |A_2|^2 \ \mathrm{sh}\ 2\tau_2^+ +$$
$$+ 2 A_1 A_2\left[\mathrm{ch}\ \bar{\tau}\ \sin\bar{\sigma}\ \sin\nu(T_1 - T_2) + \mathrm{sh}\ \bar{\tau}\ \cos\bar{\sigma}\ \cos\nu\ (T_1 - T_2)\right] \qquad \text{(VI.2.11b)}$$

Le seul cas où l'on peut obtenir des résultats simples est celui où $\sigma$ et $\tau$ sont petits, ce qui implique que l'inégalité (VI.2.9) soit valable même quand on multiplie le 1er membre par $\nu$. Dans ce cas, la phase des oscillations de $\sigma(\theta)$ p $(\theta)$ diffère de celle des oscillations de $\sigma(\theta)$ simplement par l'angle - arc tg $\bar{\sigma}(\theta)$ / $\bar{\tau}(\theta)$. Si $\nu$ est grand, on en déduit aisément que les 2 phases sont égales, à l'ordre $\nu^{-1}$, si Re s est nul, et diffèrent par $\pi/2$ si Im s est nul.

Revenons alors au modèle des perturbations de surface et écrivons le potentiel sous la forme :

$$V_{s,o} = -\ (U_s + i\ W_s)\ \frac{b}{r}\ \frac{df}{dr}\ \vec{\ell}\ .\ \vec{\sigma} \qquad b = 10^{-26}\ \mathrm{cm}^2 \qquad \text{(VI.2.12)}$$

Il est facile de voir que la valeur de $\varepsilon_s$ compatible avec cette définition est, pourvu qu'elle soit petite :

$$\varepsilon_s^{\pm} \sim \mp\ p\ \frac{U_s}{V_o}\ \frac{b}{a^2} \qquad \text{(VI.2.13)}$$

Dans ce modèle $A_{1,2}$ peut être mise* sous la forme (VI.2.8), où s est remplacé par $p^{-1}$ ka $\varepsilon_s$.

---

* Les relations (V.1.17) et (VI.2.13) nous permettent d'obtenir pour $\delta(p)$ une relation de la forme (V.1.36), mais, par suite de la variation linéaire de $\varepsilon_s$ en fonction de p, la relation (V.1.37) est une approximation très grossière. Pour obtenir $A_{1,2}(s = 0)$ nous traiterons la partie imaginaire du potentiel par la méthode self-similaire ($\varepsilon_A(p/ka)$). Ensuite, pour calculer la variation de $A_{1,2}$ avec s, il vaudra mieux effectuer une approximation linéaire en s, considérer $e^{2i\delta(p)}$ comme une fonction à variations lentes et lui appliquer les méthodes de la phase stationnaire. Ceci peut être justifié pour les angles $\theta$ suffisamment éloignés de $\theta_o$, et tant que $|\mathrm{Im}\ \varepsilon_s| << \varepsilon_A$, de sorte que C' reste un contour de descente aux 2 points de phase stationnaire.

La restriction sur $\varepsilon_s$ sera

$$s \; T^{-1} \; \frac{\partial T}{\partial s} << (ka)^{-1}$$

ou

$$|0.05 \; E_{Mev} \; U_s/V_o| < 1 \qquad \text{(VI.2.14)}$$

Cette condition est valable en général parce que des potentiels spin orbite de plus en plus petits sont utilisés quand E croit.

Nous conclurons que à travers le domaine où la section efficace est donnée par les méthodes de la phase stationnaire, les oscillations de $\sigma(\theta)$ et $P(\theta)\,\sigma(\theta)$ diffèrent par $\pi/2$ si le potentiel spin orbite est réel, 0 si il est imaginaire.

On peut montrer de la même façon que, pour un potentiel spin-orbite réel, cos $\beta$ a des minima pour les mêmes angles que $d\sigma/d\theta$ , dont l'amplitude croît quand $\theta \to \theta_o$, et est presque nulle ailleurs.

## 6.3 - Les énergies hypocritiques dans le modèle optique

### Contenu

Nous rappelons tout d'abord les résultats de Ford-Hill-Wakano et Wheeler [28] (FHWW), et nous nous en servons pour montrer que, sauf dans un petit voisinage de la valeur critique de $\ell$, on peut se contenter des formules JWKB traditionnelles. Nous introduisons ensuite un potentiel d'absorption et montrons comment le modèle à couplage fort peut être justifié. Il peut l'être comme un modèle mathématiquement équivalent au modèle physique considéré. Par contre, l'hypothèse d'absorption totale des ondes partielles de petit $\ell$ sur laquelle il est construit ne peut être justifiée à l'aide d'un potentiel complexe, pour des projectiles tels que les nucléons ou les $\alpha$, que comme une très grossière approximation, compte tenu des ordres de grandeur des valeurs de ka couramment rencontrées.

### 1) Diffusion par un potentiel réel aux énergies hypocritiques

Aux énergies hypocritiques (figure 15), le potentiel effectif présente un maximum relatif, égal à l'énergie pour une certaine valeur $\ell_1$ de $\ell$ (si $\ell$ varie de façon continue). Nous supposerons que l'énergie n'est pas très voisine de l'énergie critique, de sorte que pour $\ell = \ell_1$, le maximum est bien représenté par une parabole. FHWW ont analysé le comportement du déphasage près du sommet de la barrière, en utilisant les solutions au voisinage du sommet, et en les joignant aux solutions JWKB de part et d'autre. Soit $V_o$ le potentiel effectif maximum et $V''_o$ sa dérivée

seconde. On introduit les quantités $\omega$ et $\epsilon$ par les formules suivantes :

$$- V''_o = m \omega^2$$

$$E - V_o = \hbar \omega \epsilon \qquad \text{(VI.3.1)}$$

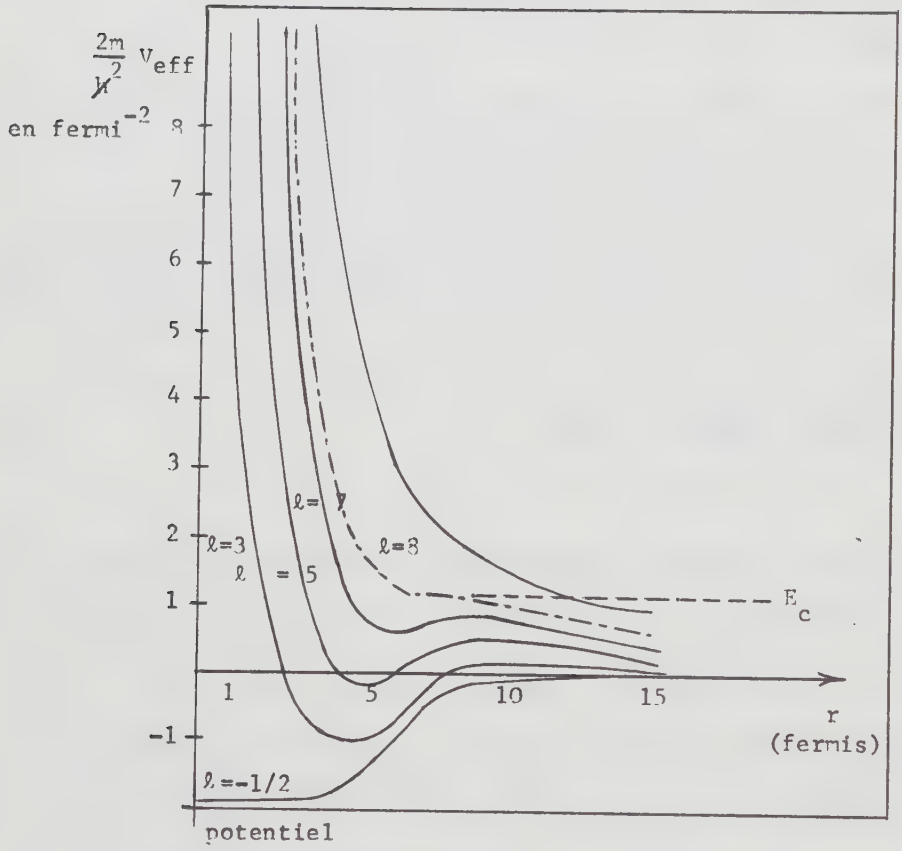


Figure 15

Le déphasage est donné par la formule suivante :

$$\delta = \delta_\infty + \text{arc cotg} \left\{ - 2\, e^I + \text{cotg}\, \overline{\theta} \right\} \qquad \text{(VI.3.2)}$$

où les quantités $\delta_\infty$, I et $\theta$ sont reliées respectivement, lorsque l'énergie est <u>inférieure</u> à $V_o$, à la traversée par les ondes (Figure 16) des régions $(\infty, T)$, $(T, T_1)$, $(T_1, T_2)$. En particulier I

est lié simplement à la probabilité de pénétration de la barrière, égale à $e^{-2I}$ dans la méthode JWKB, à $(1 - e^{2I})^{-1}$ dans la méthode FHWW.

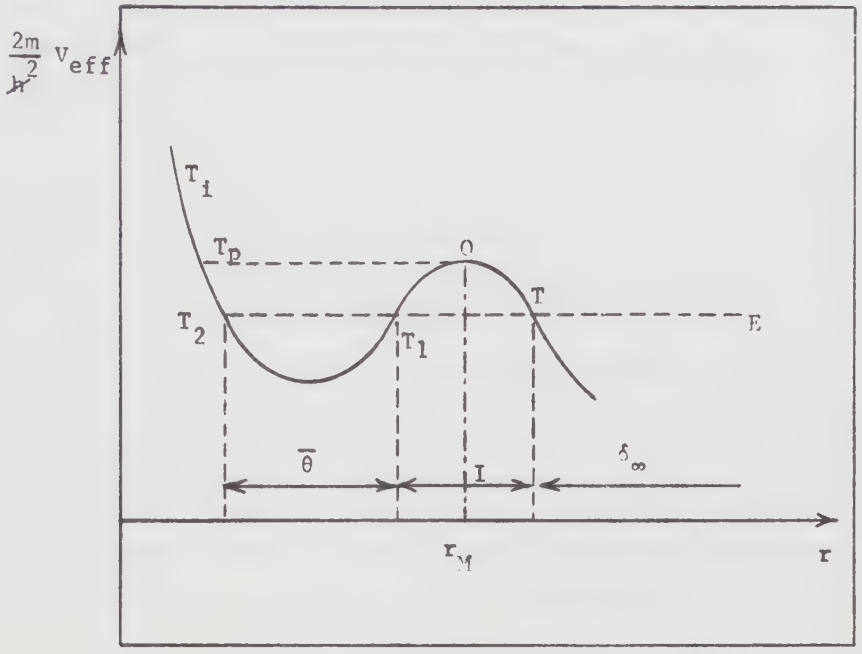


FIGURE 16

Ces quantités sont données dans tous les cas dans les tableaux suivants, où celles qui sont indicées JWKB doivent être utilisées dans (VI.3.2) pour retrouver le déphasage JWKB. Les numéros auxquels renvoie la colonne des quantités calculées sont ceux des formules de l'article de FHWW.

(6.3.3) $E << V_0$

| | | | |
|---|---|---|---|
| (28) | $\delta_\infty$ | $\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\left\{\int_T^\infty (E - V_{eff})^{1/2}\, dr - \int_{Tcomp}^\infty (E - V_{eff.comp})^{1/2} dr\right\}$ | $= \delta_\infty(JWKB)$ |
| (36) | I | $\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{T_1}^{T} (V_{eff} - E)^{1/2}\, dr$ | $I(JWKB) = +\infty$ |
| (38) | $\overline{\theta}$ | $\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}} \int_{T_2}^{T_1} (E - V_{eff})^{1/2}\, dr \quad - \frac{\pi}{2}$ | $= \overline{\theta}_{JWKB}$ |

(VI.3.4) $E \sim V_o$

| | | |
|---|---|---|
| (21) | $\delta_\infty$ | $n_o + \epsilon\, n_1 - \frac{1}{2}\ \mathrm{Arg}\left[\Gamma(\frac{1}{2} + i\,\epsilon)\right] + \frac{1}{2}\ \mathrm{Arc\ tg}\ e^{\pi\epsilon}$ |
| (21) | $\overline{\theta}$ | $n_o\,\pi + \epsilon\, n_1\pi - \frac{1}{2}\ \mathrm{Arg}\left[\Gamma(\frac{1}{2} + i\epsilon)\right] + \frac{1}{2}\ \mathrm{Arc\ tg}\ e^{\pi\epsilon}$ |
| | I | $-\pi\,\epsilon$ |

Approximativement, on a $\mathrm{Arg}\left[\Gamma(1/2 + i\,\epsilon)\right] \sim \epsilon\ \mathrm{Log}\left[(\epsilon/e)^2 + (1/4\gamma)^2\right]^{1/2}$ où $\gamma \sim 1{,}78$ (VI.3.5)

| | | |
|---|---|---|
| (14) (15) (21) | $\delta_\infty$(JWKB) | $n_o + \epsilon\, n_1 - \frac{1}{2}\epsilon\ \mathrm{Log}\ (\epsilon^2/e^2)^{1/2} + \begin{cases} 0 & \text{pour } \epsilon < 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{pour } \epsilon > 0 \end{cases}$ |
| (39) (14) (15) | $\overline{\theta}$(JWKB) | $n_o\pi + \epsilon\, n_1\,\pi - \frac{1}{2}\,\epsilon\ \mathrm{Log}\ (\epsilon^2/e^2)^{1/2} + \begin{cases} 0 & \text{pour } \epsilon < 0 \\ \frac{\pi}{4} & \text{pour } \epsilon > 0 \end{cases}$ |
| | $I_{JWKB}$ | $+\infty \quad \epsilon < 0$<br>$-\infty \quad \epsilon > 0$ |

(VI.3.6) $E \gg V_o$

$$\delta \sim \delta_\infty + \overline{\theta} \sim \sqrt{\frac{2m}{h^2}} \left\{ \int_{T_i}^{\infty} \sqrt{E - V_{eff}}\ dr - \int_{T_{comp}}^{\infty} \sqrt{E - V_{eff\ comp}}\ dr \right\}$$

Les quantités $\delta_\infty$(JWKB) et $\overline{\theta}$(JWKB) de (VI.3.4) pour $\epsilon<0$ s'obtiennent à partir des quantités correspondantes de (VI.3.3) en passant à la limite des petites valeurs de $|\epsilon|$, ce qui définit $n_o$ et $n_1$, $n_o$ et $n_1$. FHWW ont calculé ces quantités (formules 22,23,24, 25 de FHWW). Nous rappellerons seulement que $(n_o + 1)$ est le nombre (en général non entier) de niveaux d'énergie dans le puits de potentiel derrière la barrière.:

$$(n_o + 1/2)\pi = \int_{TP}^{o} \left[-2v(\xi)\right]^{1/2}\ d\xi \qquad \text{(VI.3.7)}$$

Pour les valeurs de $\ell$ suffisamment éloignées de $\ell_1$, $\epsilon$ est grand, et le déphasage est le déphasage JWKB, donné par $\delta_\infty$ pour $\epsilon$ négatif, par $\delta_\infty + \bar{\theta}$ pour $\epsilon > 0$, ou encore, en ne conservant que les premiers termes en $\epsilon$ :

$$\delta = \begin{cases} \eta_o + \epsilon\eta_1 - \frac{1}{2}\,\epsilon\,\mathrm{Log}\,(-\epsilon/e) & \text{si } \epsilon < 0 \\ \eta_o + (n_o + 1/2)\pi + \epsilon(\eta_1 + n_1\pi) - \epsilon\,\mathrm{Log}\,(\epsilon/e) & \text{si } \epsilon > 0 \end{cases} \qquad \text{(VI.3.8)}$$

Cette formule est équivalente aux formules (IV.2.32-33) du chapitre IV, et il est facile de passer de l'une aux autres, si l'on remarque qu'il résulte de (VI.3.1) que $\frac{m\omega}{\hbar}$ est équivalent à $(\ell_1+1/2)\Delta\ell_1 / r^2_M$, où $r_M$ est l'abscisse du maximum.

Devant la complication des résultats du tableau des pages 161-162, on peut se demander s'il n'est pas possible, pour évaluer l'amplitude de diffusion, de conserver le déphasage JWKB, malgré sa discontinuité pour $\epsilon = 0$. Pour répondre à cette question, remarquons tout d'abord que $\bar{\theta}$, nul quand $T_1$ et $T_2$ confluent au creux du potentiel effectif, croît jusqu'à $(n_o+1/2)\pi$ quand E croît jusqu'à $V_o$. Chaque fois que $\theta$ passe par la valeur $\pi$, cotg $\bar{\theta}$ prend des valeurs comparables à $2e^I$. Alors $\delta$, donné par la formule (VI.3.2) s'accroît de $\pi$ sur un intervalle de largeur $\Delta\epsilon$ de l'ordre de $(n_1\pi)^{-1}\, e^{-\pi\epsilon}$.

Quand cet intervalle est un petit intervalle (c'est-à-dire $\Delta\ell/\ell \ll 1$), l'analyse de la section 5.2 s'applique. Comme les sauts du déphasage sont égaux à $\pi$, il en résulte que l'amplitude de diffusion n'est pas différente, du fait de ces sauts, de celle qui correspond à un déphasage qui en serait dépourvu, c'est-à-dire au simple déphasage JWKB. Au voisinage de $\epsilon = 0$, l'intervalle du saut risque de devenir important et la fonction de déflexion nettement différente de la fonction de déflexion JWKB. En outre, le pic logarithmique infini de la fonction de déflexion JWKB est remplacé par un pic fini, en accord avec les relations (VI.3.4) et (VI.3.5).

Nous en conclurons que le déphasage JWKB peut être employé à la place des formules FHWW pour les valeurs de $\ell$ telles que $|\epsilon|$ soit, grosso modo, supérieur à 1. Dans un intervalle $\Delta\epsilon \sim 1$ de part et d'autre de $\epsilon = 0$, il conviendra d'utiliser les formules exactes. Pour nous rendre compte de l'importance de cet intervalle sur les courbes qui représentent $2m/h^2\ (V_{eff})$ en Fermi$^{-2}$, (par ex. figure 15), nous remarquerons que si $\Delta_2$ est la dénivellation de cette quantité à 1 Fermi du maximum, on a :

$$\left[\frac{2m}{h^2}\ (E - V_{eff})\right]_{F^{-2}} = 2\epsilon(\Delta_2)^{1/2} \qquad \text{(VI.3.9)}$$

L'inspection des courbes montre que la variation relative de $\ell$ correspondant à une variation de $\epsilon$ de l'ordre de 1 est faible, c'est-à-dire que, pour des énergies suffisamment élevées, mettons de 10 Mev jusqu'à l'énergie critique pour des nucléons, la variation $\Delta\ell_1$ autour de $\ell_1$où la méthode JWKB donne mal le déphasage est petite devant $\ell_1$.

Comme on sait que, dans cet intervalle, la fonction de déflexion présente un pic sommable, on peut employer l'analyse de la section (5.2) et montrer que :

a) autour d'un certain angle $\theta_o$ on aura dans l'amplitude de diffusion une zone perturbée, dont la détermination exige les formules exactes, et dont la largeur relative $\Delta\theta/\theta_o$ est $\sim \Delta\ell_1/\ell_1$.

b) pour les angles situés hors de cette zone perturbée, le déphasage JWKB sera suffisant. En effet, les oscillations qui peuvent provenir du pic de la fonction de déflexion ne dépendent que de la surface de ce pic (modulo un multiple de $\pi$) donc du saut du déphasage, calculé modulo $\pi$, donc aussi bien du saut du déphasage JWKB.

2) Influence de l'absorption - Le modèle à couplage fort

Nous introduirons maintenant les notations suivantes :

$$\frac{2m}{h^2}\ (E - V(r)) = K^2(r)\ ;\ \frac{2m}{h^2}\ E = k^2\ ;\ r^2K^2(r) = G(r) \qquad (VI.3.10)$$

La fonction G(r) est représentée sur la figure 17, qui permet de suivre commodément l'évolution du point tournant $r_o$ avec p (= $\ell$ + 1/2). L'étude du paragraphe précédent montre que, pourvu que $|p - p_1|$ ne soit pas trop petit, le déphasage JWKB constitue une bonne approximation.

Nous aurions pu aussi le prouver en nous reportant au paragraphe 5.1 et en évaluant le reste. Il est facile de vérifier que celui-ci est d'ordre $(ka)^{-1}$ si $|G(r) - p^2|$ est borné inférieurement par un nombre suffisamment grand.

Supposons maintenant qu'on introduise dans $K^2(r)$ une perturbation $\lambda W(r)$. Le déphasage $\Delta(p, \lambda W(r))$peut être écrit dans la méthode JWKB de la manière suivante :

$$\Delta(p,\lambda W) = \int_{r_o(p,\lambda W)}^{\infty} \sqrt{r^2(K^2+W) - p^2}\ \ r^{-1}\ dr - \int_{pk^{-1}}^{\infty} \sqrt{k^2r^2 - p^2}\ r^{-1}\ dr \qquad (VI.3.11)$$

Supposons que W(r) soit une fonction analytique de r au voisinage de $r_o(p)$. Il n'est pas difficile de montrer que pour une valeur non nulle de $|p - p_o|$, il existe un nombre $\varepsilon$ tel que $\Delta(p,\lambda W)$ soit analytique pour $|\lambda| < \varepsilon$. En général, ce rayon de convergence sera de l'ordre de $|r_o(p_1-\varepsilon)-r_o(p)|$ pour $p < p_1$, $|r_o(p) - r_o(p_1 + \varepsilon)|$ pour $p > p_1$. Supposons donc que p soit extérieur à un intervalle

$(p_1 - \Delta p,\ p_1 + \Delta p)$ tel que $\Delta(p, \lambda W)$ soit analytique en $\lambda$ au moins jusqu'à la valeur 1 de $\lambda$. On pourra écrire au ler ordre en $\lambda$ :

$$\Delta(p,W) \sim \Delta(p,o) + \int_{r_o(p)}^{\infty} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2 K^2 - p^2}}\, W(r) \qquad (VI.3.12)$$

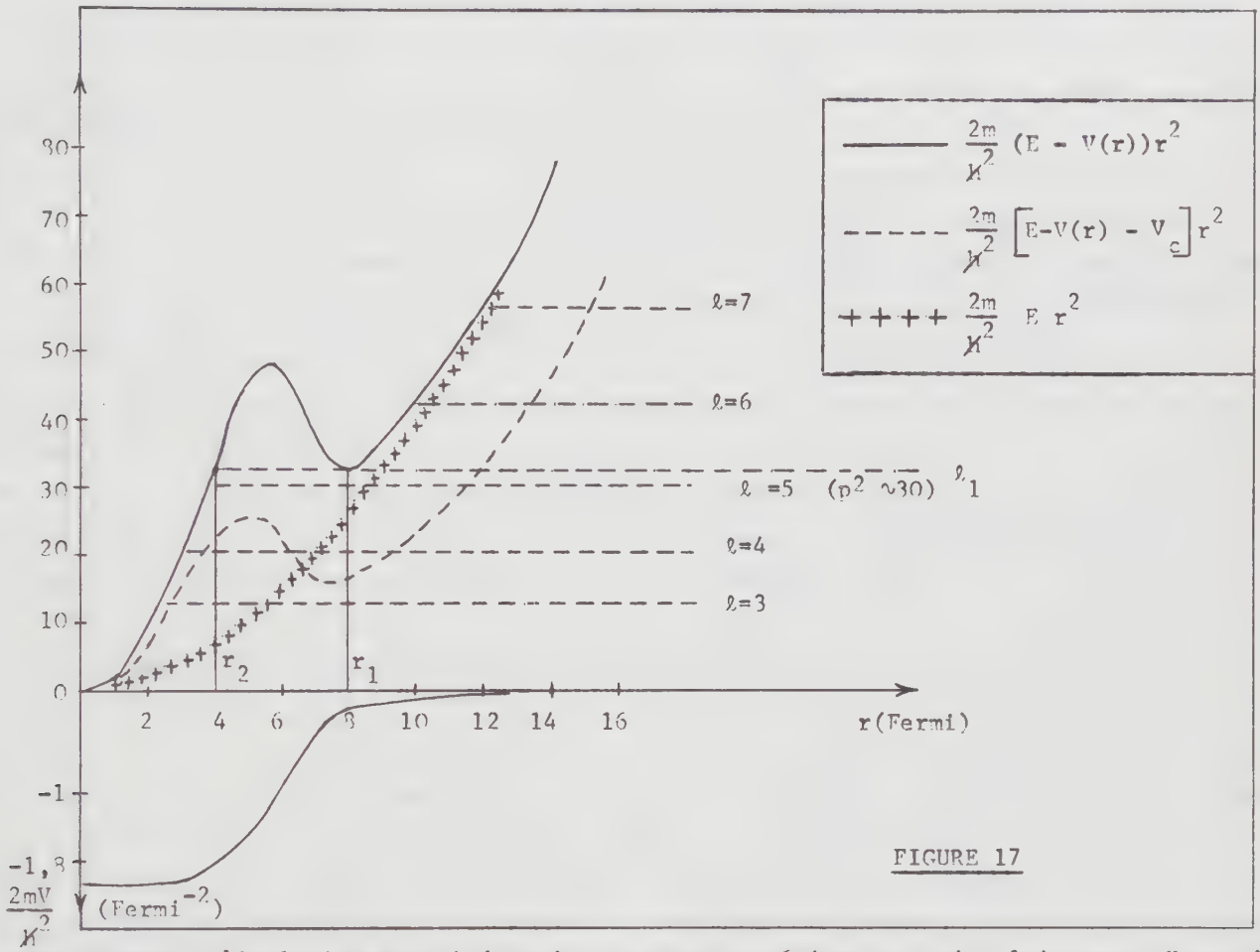


FIGURE 17

Sur cette figure, l'évolution avec ℓ du point tournant extérieur se voit clairement. Entre ℓ=6 et ℓ=5, le point tournant pénètre brusquement à l'intérieur du potentiel et l'onde partielle pour ℓ=5 est la première à voir le potentiel absorbant. Le potentiel a été tracé dans le demi plan inférieur avec une échelle des ordonnées différentes de celle du 1/2 plan supérieur.

Quelle est l'évolution de $\Delta(p,W)$ avec p quand W(r) est un potentiel imaginaire, localisé ou non dans la surface, mais dont le rayon d'action n'excède pas celui du potentiel ?

Il est facile de voir, par exemple sur la figure 17, que le point $r_1$ est situé à la périphérie du potentiel, de sorte que W(r) est très faible pour les valeurs de ℓ supérieures à $\ell_1$, et

la partie imaginaire du déphasage négligeable. Lorsque $\ell$ passe par la valeur $\ell_1$, la partie imaginaire du déphasage croît brusquement de la quantité

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,dr}{\sqrt{r^2\ K^2 - p^2}}\ W(r)\,dr$$

Dans l'exemple de la diffusion nucléon-noyau illustré par la figure 17, avec une partie imaginaire de l'ordre de 6 Mev entre 4 et 8 Fermis, on voit que cet accroissement est de l'ordre de 1,5 i. Ainsi les éléments $e^{2i\delta_\ell}$ de l'amplitude de diffusion subissent une réduction d'un facteur $e^{-3}$ au passage de $\ell$ par la valeur $\ell_1$. Ce facteur de réduction varie en général quand $\ell$ continue à diminuer. Il peut même diminuer quand $\ell \to 0$ si le potentiel imaginaire est un potentiel de surface. Cette importante et soudaine réduction est remarquable compte tenu de la petitesse du potentiel imaginaire utilisé. Elle justifie grossièrement le modèle à couplage fort. Regardons toutefois le problème de plus près.

A priori le facteur de réduction (de l'ordre de 20) peut très bien être insuffisant pour justifier le modèle à couplage fort. Prenons en effet $\ell_1 \sim 6$. Si les premiers éléments du développement de Faxen-Holtzmark étaient sommés de façon incohérente, ils pourraient donner au pire un nombre de l'ordre de 30/20, donc important même comparé à un terme principal de l'ordre de 6, et pouvant être beaucoup plus important aux grands angles que la contribution des autres termes. La petitesse de W(r) garantit précisément que ce cas ne peut pas se produire. Il résulte en effet de cette petitesse que la partie imaginaire du déphasage ne varie que lentement pour $\ell < \ell_1$. On peut alors employer la méthode de la phase stationnaire pour évaluer l'amplitude de diffusion, qui sera affectée du facteur de réduction correspondant à la partie imaginaire. Le résultat étant petit, on peut même se contenter pour un calcul grossier d'utiliser la fonction de déflexion qui correspond a $\Delta(p,o)$. Cette fonction n'a de valeur supérieure à - disons - $\Theta_1$ qu'au voisinage de $\ell = \ell_1$ (Figure 18a). Pour les valeurs de $\theta$ inférieures à $\Theta_1$, on a interférence entre les contributions de la valeur intérieure et de la valeur extérieure de $\ell$, mais la contribution venant de la valeur intérieure est affectée du facteur de réduction et ne modifie que de quelques pour cents les résultats. Pour $\theta$ de l'ordre de $\Theta_1$, on peut avoir une région perturbée difficile à préciser. Pour $\theta$ nettement supérieur, seules les deux branches au voisinage de $\ell_1$ donnent des contributions importantes à l'amplitude de diffusion.

Ces contributions sont semblables, et celle de la branche inférieure est affectée du facteur de réduction. Ainsi le modèle optique est-il équivalent, à quelques pour cents près, à une certaine forme de modèle à couplage fort, en ce sens qu'on peut, à cette approximation, négliger la contribution des valeurs de $\ell < \ell_1$. Bien sûr, cela ne justifie pas nécessairement les formes de coupures "arrondies" utilisées couramment.

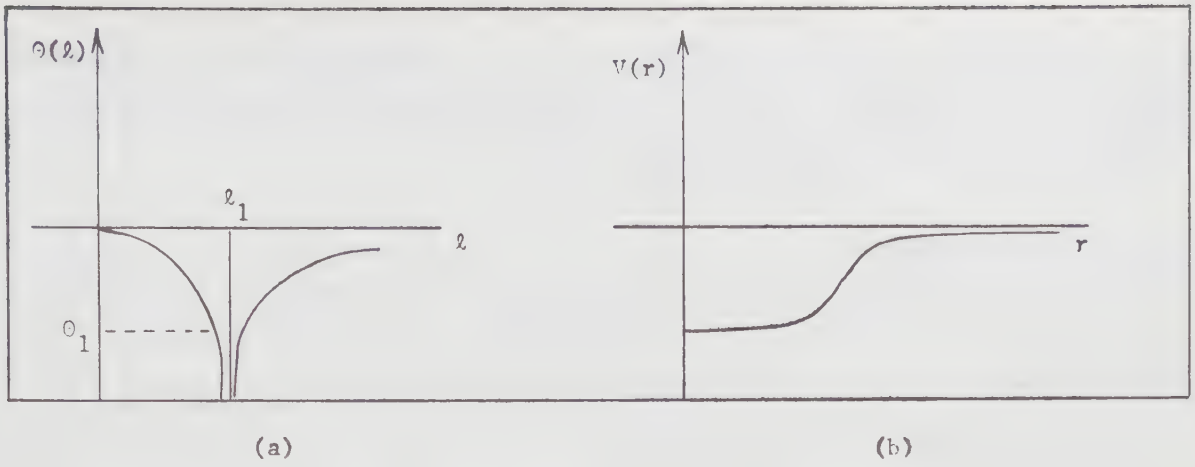


FIGURE 18

Le potentiel et la fonction de déflexion correspondante pour une énergie hypocritique et en l'absence de potentiel coulombien.

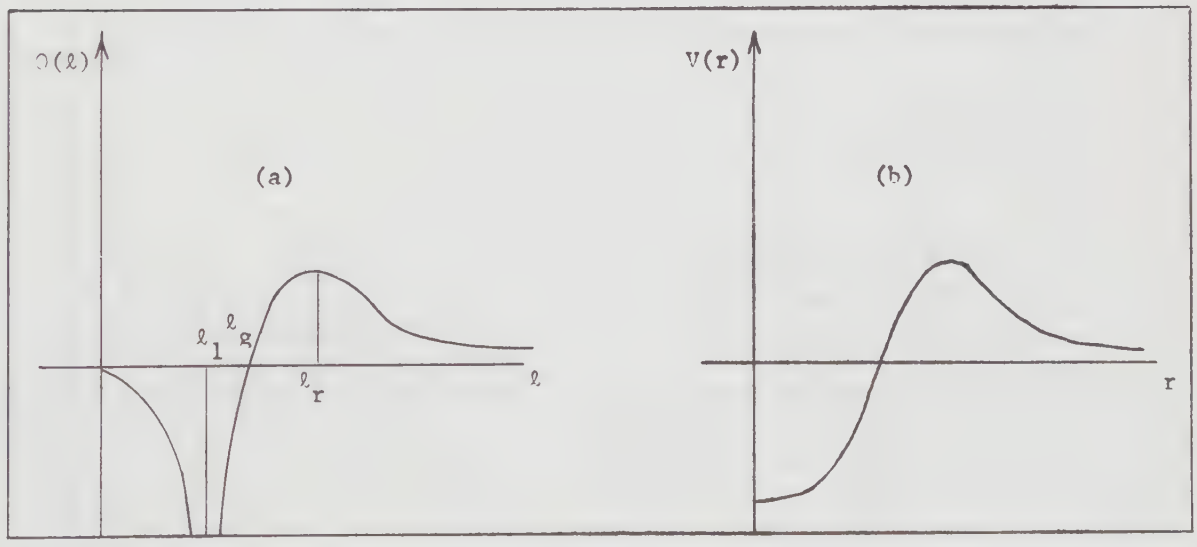


FIGURE 19

Le potentiel et la fonction de déflexion correspondante, dans le cas coulombien, pour une énergie hypocritique

Il est clair que, dans ces conditions, on ne peut espérer connaitre le potentiel que pour des valeurs de r supérieures à $r_1$, c'est-à-dire dans la région extérieure du potentiel. La méthode utilisée sera la même que précédemment.

Le potentiel coulombien

Jusqu'à présent, nous n'avons pas tenu compte du potentiel coulombien. Celui-ci, pour une distribution de charge ayant à peu près la forme du potentiel, est bossu dans la surface du noyau. La fonction de déflexion correspondante est représentée sur la figure 19a. Les seules modifications par rapport à l'analyse précédente sont l'existence supplémentaire d'un angle arc-en-ciel et d'un halo, qui sont faciles à traiter, et n'ajoutent guère à l'analyse précédente.

6.4 - Autres applications possibles

Il est possible de trouver bien des applications de la théorie semi-classique plus ou moins reliées avec le problème inverse. Ces applications sont rattachées à trois groupes généraux d'application, dont nous avons traité un exemple dans chacune des trois sections précédentes :

1) Applications au problème inverse au sens strict

Il est intéressant de traiter le problème dans le domaine non critique :

a) en présence d'un potentiel coulombien donné.

b) en supposant un coeur dur donné.

2) Applications aux déterminations du potentiel spin orbite

D'une part, l'étude que nous avons faite peut être étendue en présence de potentiel coulombien, où évidemment on considérera le rapport de $\frac{d\sigma}{d\theta}$ à $\frac{d\sigma}{d\theta}$ coulombien

D'autre part, il est facile de traiter le cas de spin $\neq 1/2$, en particulier le cas d'un projectile de spin 1, qui a d'importantes applications physiques (diffusion des deutérons par les noyaux).

3) Applications au modèle à couplage fort

Une étude plus détaillée que celle de la section 3 doit permettre de relier les valeurs des constantes du modèle à couplage fort aux caractéristiques d'un potentiel complexe dans la région extérieure à $r_o$. L'intérêt de ce travail est évident : il permettrait de relier entre elles les nombreuses études théoriques faites de la diffusion des $\alpha$ par les noyaux dans le cadre de l'un ou

l'autre modèle. Le coefficient de réduction est plus important pour les α que pour les nucléons et les hypothèses faites plus faciles à justifier, ce qui ajoute à l'intérêt du modèle. Dans une moindre mesure le travail serait aussi utile pour les études de la diffusion des ions lourds par les noyaux.

Naturellement, il existe d'innombrables applications des théories asymptotiques de la diffusion, qui ne rentrent pas dans le cadre que nous nous sommes imposés.

## CONCLUSION

*The problem of finding the non relativistic potential energy between two particles as a function of their relative distance, starting from information provided by scattering experiments, is of obvious physical importance as well as intrinsic interest.*

*R.G. Newton*

Passons en revue les résultats acquis au cours de ce travail. Nous avons développé successivement deux méthodes d'approche du problème inverse à énergie donnée :

### Approche formelle

On cherche le potentiel ou la classe de potentiels qui reproduisent une section efficace de diffusion élastique à une énergie donnée dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste. Le potentiel est supposé réel et central, et la particule sans spin.

Nous avons d'abord repris une méthode due à R.G. Newton, et qui montre que l'on peut construire une infinité de potentiels répondant a la question, dépendant d'un paramètre arbitraire. L'intérêt de la méthode est qu'elle permet en principe de construire effectivement le potentiel, et non seulement de montrer son existence, comme les méthodes antérieures. Toutefois, cette construction fait intervenir une matrice $M^{-1}$ et un vecteur $\vec{v}$ dont Newton a seulement montré l'existence. Nous avons ensuite développé une méthode nouvelle, beaucoup plus générale que la méthode de Newton.

Dans le 1er chapitre, nous avons construit effectivement la matrice $M^{-1}$ et le vecteur $\hat{v}$ annihilé par la matrice $M$. Ces deux outils mathématiques permettent de construire le potentiel à partir des déphasages (physiques) et d'étudier son comportement asymptotique. Nous avons prouvé en particulier que, pourvu que les déphasages décroissent plus vite à l'infini que $\ell^{-3+\varepsilon}$, où $\varepsilon$ est arbitrairement petit, un, et un seul, des potentiels équivalents décroît asymptotiquement plus vite que $r^{-2+\varepsilon'}$. Les autres potentiels ont une queue oscillante amortie par un facteur $r^{-3/2}$. Nous avons étudié aussi le curieux cas particulier des potentiels donnant des déphasages tous nuls à une énergie donnée.

Dans le second chapitre, nous avons continué l'étude descriptive des potentiels de Newton en cherchant leur prolongement analytique dans le plan complexe des r. Le prolongement est une fonction méromorphe dont les pôles sont d'ordre au moins deux, sauf un pôle simple à l'origine. Les fonctions de Jost peuvent aussi être prolongées analytiquement dans le plan des moments angulaires complexes $\nu$ comme des fonctions méromorphes, de pôles simples fixés aux entiers négatifs. Nous avons étudié les zéros de $f_2(\nu)$, qui conduisent aux pôles de Regge. Pour les grandes valeurs de $\nu$, ces zéros se placent dans le premier quartier sur une courbe de direction nulle, frontière d'un domaine décrit par Martin comme ne devant pas contenir de pôle de Regge. D'autre part, l'amplitude de diffusion se comporte comme $e^{i\pi\nu}$ pour $|\nu|$ infini et Arg $\nu = 3\pi/2$. Ces conditions excluent la possibilité d'appliquer le théorème de Carlson et montrent que la classe des potentiels de Newton est plus restreinte qu'on pouvait le croire.

Dans le troisième chapitre, nous avons montré d'abord que la nature du développement de Neuman utilisé par R.G. Newton exclue les potentiels pairs. Cette remarque nous a suggéré une méthode plus puissante que celle de Newton, où l'on admet des développements beaucoup plus généraux. Elle permet d'étudier les problèmes de diffusion pour une classe extrêmement large de potentiels, qui peuvent être prolongés analytiquement dans un cercle centré à l'origine et coupé sur l'axe réel négatif dans le plan des r. Au sein de cette classe, nous avons défini la sous-classe des potentiels de Newton et une sous-classe plus générale, qui contient celle des potentiels de Newton, et pour laquelle le problème inverse est soluble.

La méthode de solution conduit en général à une indétermination, qui se retrouve dans l'inversion des formules de Born, et a au moins la puissance du dénombrable. Nous avons décrit le comportement asymptotique des potentiels et les propriétés des fonctions de Jost, et avons constaté que les amplitudes de diffusion carlsonnienne n'étaient pas exclues dans la classe considérée.

Ainsi, la première partie de notre travail nous a permis d'établir que, même si l'on exige de pouvoir construire effectivement un potentiel de caractéristiques acceptables, le problème inverse à énergie donné est infiniment indéterminé si l'on ne spécifie pas davantage la classe des potentiels cherchés.

Approche semi-classique

Les méthodes semi-classiques fournissent une approche du problème inverse étroitement adaptée aux caractéristiques que l'on attend du potentiel.

La théorie semi-classique de la diffusion, qui est rappelée au chapitre I, est l'oeuvre de Ford et Wheeler, qui ont étudié en détail les belles analogies optiques qu'elle suggère. Toutefois, leur étude manque de rigueur et ne tient compte ni du spin ni de l'absorption.

Au chapitre II, nous avons construit, en nous limitant au cas d'un potentiel monotone et, surtout, au domaine non critique, une théorie semi-classique mathématiquement cohérente, où les erreurs peuvent être évaluées, et où l'absorption et le potentiel spin orbite sont traités. Nous avons étudié en détail les caractéristiques de l'amplitude de diffusion et la validité de la méthode aux grands angles. Des difficultés dues au passage d'un point tournant d'ordre 1 à un point tournant d'ordre 3 sont apparues dans l'évaluation des déphasages par la méthode JWKB au voisinage du point critique. Même bien au-dessus de l'énergie critique, les corrections de deuxième ordre au déphasage JWKB peuvent devenir importantes aux grands angles. Cette étude nous a permis aussi de constater que des oscillations aux grands angles indiquent que certaines approximations de la théorie semi-classique risquent de ne pas être justifiées. Elles peuvent ainsi donner des renseignements sur le voisinage du point critique, donc sur la forme du potentiel dans la surface du noyau.

Dans le chapitre III, nous avons appliqué au problème la théorie semi-classique sous la forme que nous avons définie au chapitre II. Elle permet d'obtenir une solution du problème inverse approchée jusqu'à l'ordre 2 du paramètre asymptotique. Cette solution est relativement simple. Elle est unique dans le cadre de la théorie. Nous avons ensuite étudié la relation entre les oscillations d'interférence des distributions angulaires de diffusion neutron-noyau et la courbe de polarisation correspondante. Nous avons pu ainsi démontrer la loi empirique de Rodberg dans un domaine assez large, et pourvu que le potentiel spin orbite soit réel. L'observation immédiate de ces oscillations donne des renseignements sur la réalité du potentiel spin orbite. Nous avons ensuite justifié le modèle à couplage fort aux énergies hypocritiques. On peut attendre que dans ce domaine, les sections efficaces ne donnent que très peu de renseignements sur le potentiel. Enfin, nous avons signalé de façon très schématique quelques autres applications.

Dans le cadre de l'étude que nous venons de faire, divers points pourront être développés et fournir le sujet de travaux ultérieurs. Il sera bon, dans l'approche formelle, de préciser la classe des potentiels de Yukawa et celle des potentiels bornés par une exponentielle décroissante au sein des classes générales que nous avons introduites au chapitre III. On pourra peut être aussi, dans une phase ultérieure, étudier la variation avec l'énergie des potentiels construits, en fonction de la variation des sections efficaces. Dans l'approche semi-classique, il sera sans

doute facile d'étendre tous les résultats obtenus aux superpositions d'un potentiel coulombien connu et du potentiel nucléaire, et à peine plus difficile de tenir compte d'un coeur dur. Par contre, il semble inutile de chercher à résoudre les complications qui apparaissent en dessous de l'énergie critique, au moins pour les applications à la physique nucléaire. Tant l'absorption que les valeurs des paramètres asymptotiques font que le problème inverse ne peut pas sans doute être résolu dans ces conditions.

On peut se demander si les marges d'erreurs expérimentales ne rendent pas inutiles pour l'instant des études trop détaillées du problème inverse. Ce n'est évidemment pas notre avis. Du point de vue phénoménologique, seules de telles études peuvent donner une idée de la précision avec laquelle on peut construire de façon cohérente un potentiel en partant des résultats expérimentaux dans tel ou tel domaine, et donc, en fin de compte, de l'intérêt qu'ont ces résultats expérimentaux pour l'étude de la matière. Du point de vue théorique, en amenant à approfondir nos connaissances sur les potentiels, elles fournissent un guide pour l'étude de la théorie des collisions dans des domaines où l'on ne peut plus parler de potentiel.

# APPENDICE A

## APPENDICE AI

### AI.1 - Bornes pour les fonctions de Ricatti Bessel

Les bornes ou majorations suivantes sont satisfaites par ces fonctions, définies par (I.1.2)

$$p < \varepsilon_o\, x^{1/2} \qquad u_p(x) = \sin(x - p\,\tfrac{\pi}{2}) + O(\varepsilon_o^2) \qquad \text{(AI.1)}$$

$$\varepsilon_o\, x^{1/2} < p < x \qquad |u_p(x)| < C\, \varepsilon_o^{-1/3}\, p^{1/3} + O(p^{-1/3}) \qquad \text{(AI.2)}$$

$$x < p < x\left[1 + O(x^{-2/3})\right] \qquad |u_p(x)| < C\, p^{1/6} + O(p^{-5/6}) \qquad \text{(AI.3)}$$

$$x(1 + O(x^{-2/3})) < p < x^2 \qquad |u_p(x)| < O(p^{-5/6}) \qquad \text{(AI.4)}$$

$$|z|^2 < p \qquad |u_p(z)| < C(\tfrac{e}{2})^p\, p^{-p/2} \qquad \text{(AI.5)}$$

AI.5 est valable pour z réel ou complexe.

Démonstration de AI.1 ($p < \varepsilon_o\, x^{1/2}$)

Rappelons le développement asymptotique [1] d'une fonction de Bessel pour les grandes valeurs de l'argument :

$$u_p(x) = \sin(x - p\,\tfrac{\pi}{2})\, P_p(x) + \cos(x - p\,\tfrac{\pi}{2})\, Q_p(x)$$

où $P_p(x)$ et $Q_p(x)$ peuvent être estimés de la façon suivante [2] :

$$\left| P_p(x) - \sum_{m=0}^{M=E(p/2+1)} \frac{(-1)^m\ \Gamma(p+1+2m)}{(2m)!\ \Gamma(p+1-2m)}\ (2x)^{-2m} \right| \leq \left| \frac{\Gamma(p+3+2M)\,(2x)^{-2M-2}}{(2M+2)!\ \Gamma(p-1-2M)} \right|$$

$$\left| Q_p(x) - \sum_{m=0}^{M'=E(\frac{p+1}{2})} \frac{(-1)^m\ \Gamma(p+2+2m)}{(2m+1)!\ \Gamma(p-2m)}\ (2x)^{-2m-1} \right| \leq \left| \frac{\Gamma(p+4+2M)\,(2x)^{-2M-3}}{(2M+3)!\ \Gamma(p-2-2M)} \right|$$

Il est facile avec l'aide de la formule de Stirling d'en déduire AI.1.

Démonstration de AI.2

$$\varepsilon_o\ x^{1/2} < p < (x-1/2)$$

Nous partons de la formule de Langer (3) :

$$J_p(x) = w^{-1/2}\ (w - \tan^{-1} w)^{1/2} \left[ J_{1/3}(z) \cos\frac{\pi}{6} - Y_{1/3}(z) \sin\frac{\pi}{6} \right] + O(p^{-4/3})$$

où $\qquad w = (x^2\ p^{-2} - 1)^{1/2} \quad \text{et} \quad z = p(w - \tan^{-1} w)$

Remplaçons maintenant la fonction entre crochets par un majorant - disons $C\ z^{-1/3}$ - et exprimons x en fonction de w :

$$\left| x^{1/2}\ J_p(x) \right| < C \left\{ \underset{0<w<p\varepsilon^{-2}}{\text{Max}} \left[ w^{-1/2} (1+w^2)^{1/4}\ (w-\tan^{-1} w)^{1/6} \right] \right.\ p^{1/6} + O(p^{-1/3})$$

$$< C\ \varepsilon_o^{-1/3}\ p^{1/3} + O(p^{-1/3}) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Démonstration de AI.3

$$x - 1/2 < p < x\ (1 + \varepsilon_1) \qquad \varepsilon_1 \gtrsim p^{-2/3}$$

On part de nouveau d'une formule de Langer (4) :

$$\pi\ J_p(x) = w^{-1/2}\ (\tanh^{-1} w - w)^{1/2}\ K_{1/3}(z) + O(p^{-4/3})$$

où

$$\begin{cases} w = (1 - p^{-2}\, x^2)^{1/2} \\ z = p\,(\tanh^{-1} w - w) \end{cases}$$

En remplaçant [5] $K_{1/3}(z)$ par la borne supérieure $C\, z^{-1/3}$, on achève la démonstration comme dans le cas précédent.

Démonstration de AI.4

$$p > x(1 + \varepsilon_1) \qquad \varepsilon_1 >> p^{-2/3}$$

Dans ce domaine z est grand : nous remplaçons $K_{1/3}(z)$ par [5] $C\, z^{-1/2}\, e^{-z}$, et la borne est $p^{1/2}\ O(p^{-4/3})$ ou $O(p^{-5/6})$.

Démonstration de AI.5

Du développement hypergéométrique [6] :

$$J_p(z) = \frac{(\frac{1}{2} z)^p}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(p+1+n)} \frac{1}{n!} (-\frac{1}{4} z^2)^n$$

nous déduisons aisément le développement suivant :

$$|J_p(z)| < \frac{|\frac{1}{2} z|^p}{p!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |\frac{z^2}{4p}|^n$$

ou pour $|z^2| < 4p$ :

$$|J_p(z)| < \frac{e}{p!} |\frac{z}{2}|^p$$

Borne indépendante de x :

Des relations AI.1, 2, 3, 4, 5, on déduit évidemment que la majoration suivante est indépendante de x(réel)

$$|u_p(x)| < C\, p^{1/3} \qquad \text{(AI.6)}$$

AI.2 - Démonstration de I.1.33

Pour simplifier, nous supposerons $\alpha < \gamma$ et étudierons la série S de la forme :

$$|S| = \sum_{0}^{r-2} \frac{|a_q|}{(r+\alpha)^2 - (q+\gamma)^2} + \sum_{r+1}^{\infty} \frac{|a_q|}{(q+\gamma)^2 - (r+\alpha)^2} + O(r^{-\beta-1})$$

Les 2 parties de (I.1.36) sont respectivement bornés par les 2 intégrales suivantes :

$$(AI.7) \qquad I_1 = C\int_1^{r-1} \frac{q^{-\beta}dq}{r^2-q^2} \qquad\qquad I_2 = C\int_{r+1}^{\infty} \frac{q^{-\beta}dq}{r^2-q^2} \qquad (AI.8)$$

Faisons alors les transformations suivantes sur $I_1$ :

$$I_1 = r^{-\beta}\left[\int_1^{r-1} \frac{dq}{r^2-q^2} + \int_1^{r-1} \frac{dq}{q^\beta} \frac{r^\beta - q^\beta}{r^2 - q^2}\right]$$

$$= r^{-\beta-1}\left\{\left[\text{Log } \frac{r+q}{r-q}\right]_1^{r-1} + \int_{r^{-1}}^{1-r^{-1}} \frac{1 - x^\beta}{1 - x^2}\, x^{-\beta}\, dx\right\} \qquad (AI.9)$$

Si nous remarquons que $\frac{1-x^\beta}{1-x}$ est borné pour $0 < x < 1$, nous voyons que le deuxième terme de (AI.9) est majoré par $(C + Cr^{\beta-1})$ pour $\beta > 0$, par C pour $\beta \leq 0$, de sorte que, pour les grandes valeurs de r :

$$|I_1| < r^{-\beta-1}\left[C \text{ Log } r + C\right] + Cr^{-2} \qquad (AI.10)$$

Nous pouvons montrer de la même manière que

$$|I_2| < r^{-\beta-1}\left[C \text{ Log } r + C\right] \qquad (AI.11)$$

Ces résultats sont écrits de manière un peu différente dans l'équation (I.1.33).

APPENDICE AII

Nous donnerons ici quelques expressions intégrales de séries particulières de fonctions de Bessel, et leurs évaluations asymptotiques.

## AII.1 - Série $T_0(r,r')$

Partons de la formule connue [6] :

$$z^{1/2}\, J_o(z\,\sin\alpha\,\sin\beta)\, e^{iz\cos\alpha\cos\beta} = (2\pi)^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n (n+\tfrac{1}{2})\, J_{n+\frac{1}{2}}(z)\, P_n(\cos\alpha)\, P_n(\cos\beta) \tag{AII.1}$$

qui, pour cos $\beta = 0$, se réduit simplement à :

$$z^{1/2}\, J_o(z\,\sin\alpha) = \sqrt{2} \sum_{p=0}^{\infty} (2p+\tfrac{1}{2})\, J_{2p+\frac{1}{2}}(z)\, \Gamma(p+\tfrac{1}{2})\, (p!)^{-1}\, P_{2p}(\cos\alpha) \tag{AII.2}$$

Posons successivement $z = r$ et $z = r'$ dans (AII.2), et faisons le produit scalaire des deux séries de polynômes de Legendre ainsi obtenues, nous obtenons :

$$T_0(r,r') = (rr')^{1/2} \sum_{o}^{\infty} (2p+\tfrac{1}{2}) \left[\Gamma(p+\tfrac{1}{2})\right]^2 (p!)^{-2}\; J_{2p+\frac{1}{2}}(r)\, J_{2p+\frac{1}{2}}(r')$$

$$= rr' \int_o^{\pi/2} J_o(r\,\sin\alpha)\, J_o(r'\,\sin\alpha)\, \sin\alpha\, d\alpha \tag{AII.3}$$

## AII.2 - Série $T_{\frac{1}{0}}(r,r')$

Dérivons (AII.1) par rapport à cos $\alpha$, et posons cos $\alpha = 0$, nous obtiendrons :

$$2\sqrt{2} \sum_{p=0}^{\infty} (2p+\tfrac{3}{2})\, \Gamma(p+\tfrac{3}{2})(p!)^{-1}\, J_{2p+3/2}(z)\, P_{2p+1}(\cos\beta) = z^{3/2}\, \cos\beta\, J_o(z\,\sin\beta) \tag{AII.4}$$

Rappelons maintenant la formule [5] suivante :

$$P_{2p+1}(x) = (2p+1)(2p+2) \int_o^x d\tau (1-\tau^2)^{-1} \int_\tau^1 P_{2p+1}(\sigma)\, d\sigma \tag{AII.5}$$

Appliquons à (AII.4) l'opérateur intégral impliqué dans (AII.5) : nous obtenons, après une intégration par parties :

$$\sum_{p=o}^{\infty} (2p+3/2)\, \frac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+2)}\, J_{2p+3/2}(z)\, P_{2p+1}(\cos\beta)$$

$$= (2z)^{1/2} \int_o^{\cos\beta} d\tau (1-\tau^2)^{-1/2}\, J_1(z\sqrt{1-\tau^2}) \tag{AII.6}$$

Posons z = r dans (AII.4) et z = r' dans (AII.6), et faisons le produit scalaire de ces deux fonctions, nous obtenons :

$$\bar{T}_0(r,r') \equiv (rr')^{1/2} \sum_{p=0}^{\infty} (2p+\frac{3}{2}) \frac{\Gamma(p+1/2)\,\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(p+2)} J_{2p+3/2}(r)\, J_{2p+3/2}(r')$$

$$= rr' \int_0^{\pi/2} J_1(r \sin\beta)\, J_1(r' \sin\beta) \sin\beta \, d\beta \qquad \text{(AII.7)}$$

AII.3 - Expressions simples pour $T_0(r,r)$ et $\bar{T}_0(r,r)$

Il résulte de formules bien connues [8][9] que $T_o$ et $T_1$ se réduisent pour r = r' à :

$$T_0(r,r) = r \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+1}(2r) = \frac{1}{2} r \int_0^{2r} J_o(t)\, dt \qquad \text{(AII.8)}$$

$$\bar{T}_0(r,r) = r \sum_{m=0}^{\infty} J_{2m+3}(2r) = T_0(r,r) - r\, J_1(2r) \qquad \text{(AII.9)}$$

AII.4 - Expressions asymptotiques de $T_0$ et $\bar{T}_0$

Pour les obtenir, nous transformerons [10] les formules AII.3 et AII.7, en nous servant du théorème de Parseval :

$$T_0(r,r') = rr' \int_o^{\infty} w\, \chi(w)\, \psi(w)\, dw \qquad \text{où}$$

$$\chi(w) = \int_o^{\infty} J_o(r\xi)\, J_o(r'\xi)\, J_o(w\xi)\, \xi\, d\xi$$

$$\psi(w) = \int_o^{\infty} J_o(w\xi)\, (1-\xi^2)^{-1/2}\, \xi Y(1-\xi)\, d\xi$$

Une transformation toute semblable pour $\bar{T}_0(r,r')$ et l'application de formules bien connues fournit :

$$T_0(r,r) = 2\pi^{-1}\, rr' \int_a^b \sin w\, (b^2 - w^2)^{-1/2}\, (w^2 - a^2)^{-1/2}\, dw \qquad \text{(AII.10)}$$

$$\bar{T}_0(r,r') = -(4\pi)^{-1} \int_a^b (b^2 - w^2)^{1/2}\, (w^2 - a^2)^{1/2} \frac{d}{dw} (w^{-1} \sin w)\, dw \qquad \text{(AII.11)}$$

où nous avons posé :

$$a = |r - r'| \qquad ; \qquad b = r + r'$$

En intégrant par partie dans AII.11 et en soustrayant le résultat de $T_o$, nous obtenons :

$$T_0 - T_{\bar{0}} = \pi^{-1} \int_a^b (w^2 - a^2)^{1/2} (b^2 - w^2)^{-1/2} \sin w \, dw \qquad \text{(AII.12)}$$

$$= \pi^{-1} \left\{ \int_a^b \sin w \, dw \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2-w^2}} - \int_a^b \sin w \, dw \frac{\sqrt{b^2-a^2} - \sqrt{w^2-a^2}}{\sqrt{b^2-w^2}} \right. \qquad \text{(AII.13)}$$

Une intégration par parties permet de transformer le second terme de AII.13 en :

$$- \cos w + \int_a^b \frac{\cos w \sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2-a^2} + \sqrt{w^2-a^2}} \cdot \frac{w \, dw}{\sqrt{(w^2-a^2)(b^2-w^2)}} \qquad \text{(AII.14)}$$

Si on remplace le premier facteur de l'intégrant par 1, ainsi que le 1er terme de l'expression (AII.14), nous obtenons pour celle-ci une majoration indépendante de a et de b. Le 1er terme de AI.13 peut à son tour être séparé en deux parties :

$$\pi^{-1} \int_o^b \sin w \, dw \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2-w^2}} - \pi^{-1} \int_o^a \sin w \, dw \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{b^2-w^2}} \qquad \text{(AII.15)}$$

Une intégration par parties et une majoration des résultats obtenus montrent que le second terme peut être borné indépendamment de a et de b, tandis que le 1er peut être exprimé avec l'aide de la fonction de Struve de (r+r') : on obtient ainsi :

$$T_0 - T_{\bar{0}} = (rr')^{1/2} \left[ \mathbb{H}_o(r+r') + O(r^{-1/2} \, r'^{-1/2}) \right] \qquad \text{(AII.16)}$$

Nous trouvons de la même façon à partir de (AII.10) et (AII.11) :

$$T_0 + T_{\bar{0}} = \pi^{-1} \int_a^b \sin w \, dw \, (b^2 - w^2)^{1/2} \, (w^2 - a^2)^{-1/2} \qquad \text{(AII.17)}$$

$$= \pi^{-1} \left\{ \int_a^\infty \sin w \, dw \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{w^2-a^2}} - \int_b^\infty \sin w \, dw \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\sqrt{w^2-a^2}} - \int_a^b \sin w \, dw \frac{\sqrt{b^2-a^2} - \sqrt{b^2-w^2}}{\sqrt{w^2-a^2}} \right\}$$

(AII.18)

En suivant exactement la même méthode que ci-dessus, nous pouvons montrer facilement que tous les termes dans (AII.18) sont bornés indépendamment de a et b, sauf le premier, qui fournit une fonction de Bessel de (r-r') :

$$T_0 + T_{\bar{0}} = (rr')^{1/2} \left[ J_o(r - r') + O(r^{-1/2} \, r'^{-1/2}) \right]$$

AII.5 - Séries dérivées

Nous définirons maintenant une fonction T' typique de toutes les séries obtenues à partir de $T_o$ et $\bar{T}_o$ par dérivation.

$$T' = r \frac{\partial}{\partial r} r^{-1} T_o(r,r') = - \frac{\partial}{\partial r'} \bar{T}_o(r,r') \qquad \text{(AII.20)}$$

$$= - rr' \int_o^{\pi/2} J_1(r \sin\theta) J_o(r' \sin\theta) \sin^2\theta \, d\theta$$

Il est facile d'évaluer cette fonction comme la somme de 2 termes :

$$- 2\pi^{-1} (rr')^{1/2} \int_o^{\pi/2} \sin(r \sin\theta - \tfrac{\pi}{4}) \cos(r' \sin\theta - \tfrac{\pi}{4}) \sin\theta \, d\theta$$

$$+ (rr')^{1/2} \int_o^{\pi/2} \left[ 2\pi^{-1} \sin(r \sin\theta - \tfrac{\pi}{4}) \cos(r'\sin\theta - \tfrac{\pi}{4}) - (rr')^{1/2} \sin\theta \, J_1(r\sin\theta) \, J_o(r'\sin\theta) \right] \sin\theta \, d\theta \qquad \text{(AII.21)}$$

Le comportement asymptotique bien connu des fonctions de Bessel nous permet de voir que le second terme dans (AII.21) est de l'ordre de $Cr^{-1} + Cr'^{-1}$, tandis que le premier peut être calculé exactement :

$$T' = \tfrac{1}{2} (rr')^{1/2} \left[ - J_1(|r-r'|) \, \mathrm{sgn}(r-r') + (\tfrac{2}{\pi} - H_1(r+r')) + O(r^{-1}) + O(r'^{-1}) \right] \qquad \text{(AII.22)}$$

AII.6 - Série $T_1$

Nous définirons maintenant une série typique de la classe 1

$$T_1(r,r') = \sum_o^\infty (2n+1)^{-1} u_n(r) \, u_n(r') \qquad \text{(AII.23)}$$

Etudions-la d'abord pour r = r'. Rappelons les 2 formules connues (11) :

$$J_{n+\frac{1}{2}}(r) \, J_{n+\frac{1}{2}}(r) = 2\pi^{-1} \int_o^{\pi/2} J_{2n+1}(2r\sin\theta) \, d\theta$$

$$\sum_o^\infty (2n+1)^{-1} J_{2n+1}(r) = \frac{\pi}{4} H_o(r) \qquad \text{(AII.24)}$$

Elles donnent pour $T_1(r,r)$ la formule suivante :

$$T_1(r,r) = \frac{\pi}{4} r \int_0^{\pi/2} H_o(2r \sin\theta)\, d\theta$$

Pour évaluer cette intégrale, nous la considèrerons comme la somme de 4 termes :

$$\int_0^{\pi/2} Y_o(2r \sin\theta)\, d\theta + \int_0^{r^{-1/2}} \left[ H_o(2r \sin\theta) - Y_o(2r \sin\theta) \right] \cos\theta\, d\theta$$

$$+ \int_0^{r^{-1/2}} \left[ H_o(2r \sin\theta) - Y_o(2r \sin\theta) \right] (1 - \cos\theta)\, d\theta + \int_{r^{-1/2}}^{\pi/2} \left[ H_o(2r \sin\theta) - Y_o(2r \sin\theta) \right] d\theta$$

Le premier terme peut être calculé exactement [12] - il est de l'ordre de $r^{-1}$. Le second terme peut être évalué a partir de formules connues [13] - il est de l'ordre de $(\pi r)^{-1} \text{ Log } r^{1/2} + O(r^{-1})$. Le troisième terme peut être majoré par $Cr^{-3/2} \text{ Log} r$. Le quatrième enfin peut être évalué à partir des développements asymptotiques des fonctions qu'il contient [14] - il est de l'ordre de $(\pi r)^{-1} \text{ Log}(r^{1/2}) + O(r^{-1})$. Nous pouvons donc écrire :

$$T_1(r,r) \sim \frac{1}{4} \text{ Log } r + O(\text{cte}) \qquad \text{(AII.26)}$$

De la même façon, des calculs un peu compliqués, après avoir dérivé $T_1(r,r)$ sous le signe somme, montrent que :

$$\left| \frac{\partial}{\partial r} T_1(r,r) \right| < \frac{1}{4} r^{-1} \text{ Log } r \qquad \text{(AII.27)}$$

Enfin, l'inégalité de Schwarz et (AII.23) permettent de déduire (AII.26) :

$$|T_1(r,r')| < C(\text{Log } r)^{1/2} (\text{Log } r')^{1/2} \qquad \text{(AII.28)}$$

## APPENDICE III - Expression nouvelle des $a_\ell$

Nous désirons obtenir pour étudier le comportement asymptotique de ces coefficients des formules plus pratiques que celles obtenues précédemment. Partons de la formule fondamentale :

$$\tan\Delta\ \hat{e} = M\ \hat{a} + \tan\Delta\ M \tan\Delta\ \hat{a} \qquad \text{(AIII.1)}$$

où M est la matrice

$$M_{\ell}^{\ell'} = \begin{cases} \left[\ell'(\ell'+1) - \ell(\ell+1)\right]^{-1} & \text{si } \ell' - \ell \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } \ell' - \ell \text{ est pair} \end{cases} \qquad \text{(AIII.2)}$$

La matrice inverse $M^{-1}$ de M est égale à :

$$M^{-1} = \mu M \mu \qquad \text{(AIII.3)}$$

où $\mu$ est une matrice diagonale, dont les éléments sont égaux à :

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{2n+1} &= 2\pi^{-1} (2n+3/2) \left[\Gamma(n+3/2) / \Gamma(n+1)\right]^2 \sim 4\pi^{-1} n^2 \\ \bar{\mu}_{2n} &= 2\pi^{-1} (2n+1/2) \left[\Gamma(n+1/2) / \Gamma(n+1)\right]^2 \sim 4\pi^{-1} \end{aligned} \qquad \text{(AIII.4)}$$

Pour transformer (AIII.1), nous étudierons d'abord les conditions dans lesquelles les produits $MM^{-1}\hat{x}$ et $M^{-1}M\hat{x}$ sont associatifs, donc égaux à $\hat{x}$. En utilisant (AIII.3) (AIII.4), et les bornes données dans la section (I.1.2), il est facile de montrer que toutes les séries doubles dans $M(M^{-1}\hat{x})$ sont majorées en valeur absolue par des séries sommables, donc sont sommables, si

$$\begin{aligned} x_{\ell_2 \text{ pair}} &< C\, \ell_2^{-\varepsilon} \qquad \text{(a)} \\ x_{\ell_2 \text{ impair}} &< C\, \ell_2^{-1-\varepsilon} \qquad \text{(b)} \end{aligned} \qquad \text{(AIII.5)}$$

Le théorème de Fubini nous conduit alors immédiatement au résultat :

$$M(M^{-1} x) = MM^{-1}\hat{x} = \hat{x} \qquad \text{(AIII.6)}$$

On remarquera que la condition AIII.5b est nécessaire pour permettre l'application de $M^{-1}$ à $\hat{x}$. Il est facile de voir de la même façon que $M^{-1}M\hat{x}$ est associative si :

$$\begin{aligned} x_{\ell_2 \text{ pair}} &< C\, \ell_2^{-\varepsilon} \\ x_{\ell_2 \text{ impair}} &< C\, \ell_2^{1-\varepsilon} \end{aligned} \qquad \text{(AIII.7)}$$

Revenons à l'équation (AIII.1). Les conditions de sommabilité dans cette équation sont :

$$|a_\ell| < C\,\ell^{1-\varepsilon} \qquad |a_\ell \operatorname{tg} \delta_\ell| < C\,\ell^{1-\varepsilon} \qquad \text{(AIII.8)}$$

Si nous supposons plus précisément que $|\ell^{1+\varepsilon}\delta_\ell|$ est borné, l'opérateur $M^{-1}$ peut être appliqué à tous les termes de (AIII.1). Grâce à (AIII.5) et (AIII.6), en rappelant que $\hat{v}$ est annihilé par M, nous déduisons de (AIII.1) l'équation suivante :

$$M^{-1} \tan \Delta\, \hat{e} + \alpha\hat{v} = (1 + M^{-1} \tan \Delta\, M \tan \Delta)\, \hat{a} = (1 + R)\, \hat{a} \qquad \text{(AIII.9)}$$

Cette équation fut donnée par Newton, et étudiée en détail ici au chapitre I, mais les conditions de validité n'avaient pas été pleinement dégagées. Si $\ell^{4/3+\varepsilon}\ \delta_\ell$ est borné, l'analyse donnée dans le chapitre I montre qu'il est possible d'obtenir un ensemble de $a_\ell$ et que ces $a_\ell$ sont bornés. Nous voyons ici que cette analyse est compatible avec les conditions ci-dessus, et nous supposerons désormais que

$$\ell^{4/3 + s}\ \delta_\ell < C \qquad s > 0 \qquad \text{(AIII.10)}$$

L'équation (AIII.9) est équivalente à l'ensemble d'équations suivant :

$$\alpha\, \hat{v} = (1 + R)\, (\alpha\hat{v} + \hat{c}) \qquad \text{(a)}$$

$$M^{-1} \tan \Delta\, \hat{e} = (1 + R)\, \hat{b} \qquad \text{(b)} \qquad \text{(AIII.11)}$$

$$\hat{a} = \hat{b} + \hat{c} + \alpha\hat{v} \qquad \text{(c)}$$

On peut déduire de (AI.10) et des résultats du chapitre I, en remarquant que R ne connecte que des composantes de même parité, les ordres de grandeur suivants :

$$a_{2r} = \alpha\, v_{2r} + O(r^{-\varepsilon})$$

$$c_{2r} = O(r^{-\varepsilon}) \quad ; \quad c_{2r+1} = 0 \qquad \text{(AIII.12)}$$

$$b_{2r} < C\, r^{-\varepsilon} \quad ; \quad |b_{2r+1}| < C$$

Les deux dernières inégalités nous permettent d'écrire :

$$\hat{b} = M^{-1} \tan \Delta \cot \Delta\, M\, \hat{b} \qquad \text{(AIII.13)}$$

Comme $\tan \Delta$ et $\cot \Delta$ sont diagonales, l'associativité du produit (AIII.13) est assurée par celle de $MM^{-1}$. L'équation (AIII.11b) peut donc être écrite comme

$$M^{-1} \tan \Delta \, \hat{e} = M^{-1} \tan \Delta (1 + R^*) \cot \Delta \, M \, \hat{b} \qquad \text{(AIII.14)}$$

où

$$R^* = M \tan \Delta \; M^{-1} \tan \Delta \qquad \text{(AIII.15)}$$

Si nous remarquons que le vecteur $\mu^{-1} \hat{v}$ est annihilé par $M^{-1}$, nous déduisons de (AIII.14) l'équation suivante :

$$\hat{e} - \gamma \cot \Delta \, \mu^{-1} \hat{v} = (1 + R^*) \cot \Delta \, M \, \hat{b} \qquad \text{(AIII.16)}$$

Une comparaison entre les comportements asymptotiques des deux membres de (AIII.16) montre que $\gamma$ est nul. De la même façon, nous obtenons à partir de (AIII.16) la relation suivante pour $\hat{b}$:

$$\hat{b} = M^{-1} \tan \Delta (1 + R^*)^{-1} \hat{e} \qquad \text{(AIII.17)}$$

Quelques calculs, et des précautions semblables à celles prises ci-dessus, permettent de calculer $\hat{c}$ en 2 étapes :

$$- R \alpha \hat{v} = (1 + R) \hat{c} \qquad \text{(AIII.18)}$$

$$\hat{c} = M^{-1} \tan\Delta \cot\Delta \, M \, \hat{c} \qquad \text{(AIII.19)}$$

$$-\alpha \, M \tan \Delta \, \hat{v} = (1 + R^*) \cot \Delta \, M \, \hat{c} \qquad \text{(AIII.20)}$$

De (AIII.11a), (AIII.17) et (AIII.20), nous déduisons la valeur de $\hat{a}$ :

$$\hat{a} = \alpha \hat{v} + M^{-1} \tan \Delta (1 + R^*)^{-1} \left[ \hat{e} - \alpha \, M \tan \Delta \, \hat{v} \right] \qquad \text{(AIII.21)}$$

Nous devons maintenant étudier l'équation :

$$\hat{y}_o = \hat{x}_o - R^* \hat{y}_o = \hat{x}_o - \mu^{-1} R \mu \, \hat{y}_o \qquad \text{(AIII.22)}$$

$$\mu \, \hat{y}_o = \mu \, \hat{x}_o - R \mu \, \hat{y}_o \qquad \text{(AIII.23)}$$

Nous voyons que ce problème est équivalent à celui de l'inversion de (1 + R), qui a été traité dans la section (I.3.2). Toutefois, l'application de l'opérateur $(1+R)^{-1}$ peut rencontrer des difficultés nouvelles du fait que $(\mu\ \hat{x})_\ell$ se comporte asymptotiquement comme $\ell^2$. Nous savons que la solution de

$$\hat{y} = \hat{x} - R\ \hat{y} \tag{AIII.24}$$

est

$$\begin{cases} y_{2r} = x_{2r} + \sum_p V_{2r}^{2p}\ \operatorname{tg}\delta_{2p}\ x_{2p}(-1)^p \\ y_{2r+1} = \sum_p U_{2r+1}^{2p+1}\ (x_{2p+1} - \beta_1\ \bar{\mu}_{2p+1}) \end{cases} \tag{AIII.25}$$

où

$$U_{2r+1}^{2p+1} = \delta_{2r+1}^{2p+1} + \bar{V}_{2r+1}^{2p+1}\ \operatorname{tg}\delta_{2p+1}\ (-1)^p \tag{AIII.26}$$

$V_{2r}^{2p}$ est définie, en fonction des opérateurs $\gamma_o$ et $\gamma_o^r$ définis dans (I.3.2) par :

$$V_{2r}^{2p} = \mathcal{D}^{-1}(\gamma_o) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int\cdots\int \begin{bmatrix} \int \gamma_o^r(\theta')\ \bar{u}_{2p}(\theta')\ d\theta' & ; \gamma_o^r(\theta_1) \cdots\cdots \gamma_o^r(\theta_m) \\ \int \gamma_o(\theta_1,\theta')\ \bar{u}_{2p}(\theta')\ d\theta' & ; \gamma_o(\theta_1,\theta_1)\cdots\cdots \\ \vdots & \vdots \\ \int \gamma_o(\theta_m,\theta')\ \bar{u}_{2p}(\theta')\ d\theta' & ; \gamma_o(\theta_m,\theta_1)\cdots \gamma_o(\theta_m,\theta_m) \end{bmatrix} \tag{AIII.27}$$

où

$$\mathcal{D}(\gamma_o) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int\cdots\int \begin{bmatrix} \gamma_o(\theta_1,\theta_1) \cdots\cdots \gamma_o(\theta_1,\theta_m) \\ \vdots \\ \gamma_o(\theta_m,\theta_1) \cdots\cdots \gamma_o(\theta_m,\theta_m) \end{bmatrix} d\theta_1 \cdots d\theta_m \tag{AIII.28}$$

Toutes les intégrations sont prises entre 0 et $\pi/2$. Les fonctions $\gamma_o$ et $\gamma_o^r$ sont bornées pour n'importe quelle valeur dans le domaine d'intégration si $\ell^{4/3+\varepsilon}\delta_\ell$ est bornée. $\overline{V}_{2r+1}^{2p+1}$ est donnée par (AIII.27), pourvu que l'on remplace partout $\gamma_o$ par $\gamma_1, \gamma_o^{(r)}$ par $\gamma_1^{(r)}$. Si $\mathcal{D}$ est accidentellement nul, soit pour $\gamma_o$ soit $\gamma_1$, l'inversion de (1 + R) n'est pas possible. Comme d'habitude, nous supposerons que ce n'est pas le cas pour l'ensemble de déphasages étudié. $\beta_1$ est donné par :

$$\beta_1 = \frac{\sum_r \sigma_{2r+1} \sum_p U_{2r+1}^{2p+1}\ x_{2p+1}}{1 + \sum_r \sigma_{2r+1} \sum_p U_{2r+1}^{2p+1}\ \bar{u}_{2p+1}} \tag{AIII.29}$$

où $$\sigma_{2r+1} = \operatorname{tg} \delta_{2r+1} \sum_q M_{2q}^{2r+1} \bar{\mu}_{2q} \operatorname{tg} \delta_{2q} \qquad \text{(AIII.30)}$$

Si $\ell^{4/3+\varepsilon}\ \delta_\ell$ est borné, il est clair que $V_{2r}^{2p}$ ou $V_{2r+1}^{2p+1}$ sont bornés par $C\ p^{1/3}$. Il résulte de (AIII.25), (AIII.26), (AIII.29) et (AIII.30), qu'une condition suffisante pour assurer la convergence de toutes ces séries est que $p^{1/3+\varepsilon} |\operatorname{tg} \delta_p\ x_p|$ soit borné quand $p \to \infty$

Si nous revenons à (AIII.22), nous voyons donc que cette équation peut être résolue si $\ell^{10/3+\varepsilon}$ est bornée. Quand cette condition est remplie, (AIII.21) est valable, et nous pouvons l'écrire sous la forme équivalente :

$$\hat{a} = \alpha \hat{v} + M^{-1}\ \hat{\Delta}' \qquad \text{(AIII.31)}$$

où $\hat{\Delta}'$ est un vecteur dont les composantes ont le même comportement asymptotique que les $\operatorname{tg} \delta_\ell$ :

$$\Delta'_\ell \sim \operatorname{tg} \delta_\ell \left[1 + O(\ell^{-2})\right] \text{ quand } \ell \to \infty \qquad \text{(AIII.32)}$$

APPENDICE AIV

Les matrices $L_\nu^{\ell'}$ et $M^{-1}$ étant définies par (II.2.7) et (AIII.3), nous calculerons les éléments de

$$C_\nu^\ell = \sum_{\ell'} L_\nu^{\ell'}\ e^{i\ell'\pi/2}\ \gamma_{\ell'}^\ell \qquad \text{(AIV.1)}$$

Pour $\ell = (2p + 1)$, d'après (I.3.27), (I.3.28) et (I.2.3) $C_\nu^\ell$ est égal à :

$$C_\nu^{2p+1} = -(-1)^p\ \pi/2 \int_o^\infty J_{\nu+1/2}(\rho)\ A(\rho)\ \rho^{-1}\ d\rho \qquad \text{(AIV.2)}$$

où $$A(\rho) = 2\pi\ \bar{\mu}_{2p+1}(p+1/2)(p+1) \int_o^\infty J_{2p+3/2}(\rho_1)\rho_1^{-1}\ d\rho_1 \sum_n \bar{\mu}_{2n}\ J_{2n+1/2}(\rho_1)\ J_{2n+1/2}(\rho)$$

(AIV.3)

En utilisant pour la série de droite la forme (AII.3), nous pouvons écrire $A(\rho)$ de la manière suivante :

$$A(\rho) = 4\ \bar{\mu}_{2p+1}(p+1/2)(p+1)\rho^{1/2} \int_o^{\pi/2} J_o(\rho \sin\alpha)\ \sin\alpha d\alpha \int_o^\infty J_o(\rho_1 \sin\alpha)\ J_{2p+3/2}(\rho_1)\rho_1^{-1/2} d\rho_1$$

(AIV.4)

Avec l'aide de formules connues,[15] nous pouvons calculer l'intégrale dans (AIV.4) et obtenir :

$$A(\rho) = 4\,\bar{\mu}_{2p+1}\,\frac{\Gamma(p+2)}{\Gamma(p+1/2)}\,\left(\frac{\rho}{2}\right)^{1/2}\int_o^{\pi/2} J_o(\rho\sin\alpha)\,P_{2p+1}(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha \qquad \text{(AIV.5)}$$

En insérant le résultat dans (AIV.2) et en effectuant l'intégrale sur $\rho$ grâce à des formules connues [16], nous obtenons :

$$C_\nu^{2p+1} = -(-1)^p\,2\left(2p+\frac{3}{2}\right)\,\frac{\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(p+1)}\,\frac{\Gamma(\nu/2+1/2)}{\Gamma(\nu/2+1)}\int_o^{\pi/2} P_{2p+1}(\cos\alpha)\,P_\nu(\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha \qquad \text{(AIV.6)}$$

Une relation connue fournit alors le résultat :[17]

$$C_\nu^{2p+1} = -(-1)^p\,2\left(2p+\frac{3}{2}\right)\left[\frac{\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(p+1)}\,\frac{\Gamma(\nu/2+1/2)}{\Gamma(\nu/2+1)}\right]^2\,\frac{\sin\pi/2(\nu-2p-1)}{\pi/2(\nu-2p-1)(\nu+2p+2)} \qquad \text{(AIV.7)}$$

Pour $\ell = 2p$, $C_\nu^\ell$ peut être écrit, à partir des relations (I.3.27)(I.3.28) et (I.2.3), de la manière suivante :

$$C_\nu^{2p} = i\,\frac{\pi}{2}\int_o^\infty J_{\nu+1/2}(\rho)\,B(\rho)\,\rho^{-1}\,d\rho \qquad \text{(AIV.8)}$$

où $B(\rho)$ est donné par :

$$B(\rho) = \bar{\mu}_{2p}\sum_r \bar{\mu}_{2r+1}\,J_{2r+3/2}(\rho)\,(-1)^r +$$

$$+ 2\pi\;\bar{\mu}_{2p}\,p(p+1/2)(-1)^p\int_o^\infty J_{2p+1/2}(\rho')\sum_r \bar{\mu}_{2r+1}\,J_{2r+3/2}(\rho)\,J_{2r+3/2}(\rho') \qquad \text{(AIV.9)}$$

En utilisant pour les séries du terme de droite les expressions intégrales (AII.7), nous obtenons pour $B(\rho)$ la relation suivante :

$$B(\rho) = \bar{\mu}_{2p}\,(2/\pi)^{1/2}\,\rho^{1/2}\,J_1(\rho) + \qquad \text{(AIV.10)}$$

$$+ 4p(p+1/2)(-)^p\;\bar{\mu}_{2p}\,\rho^{1/2}\int_o^{\pi/2} J_1(\rho\sin\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\int_o^\infty J_1(\rho'\sin\alpha)\,J_{2p+1/2}(\rho')\rho'^{-1/2}\,d\rho'$$

Nous appellerons respectivement $B_1$ et $B_2$ le premier et le second terme de (AIV.10). Il est possible de transformer la dernière intégrale de $B_2(\rho)$ en se servant de formules connues, et obtenir :[18]

$$B_2(\rho) = 2\,\bar{\mu}_{2p}\,\left(\frac{\rho}{2}\right)^{1/2}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1/2)}\int_0^{\pi/2} J_1(\rho\sin\alpha)\,\sin^2\alpha\,d\alpha\,\frac{d}{d\cos\alpha}\,P_{2p}(\cos\alpha)$$

(AIV.11)

En reportant le résultat dans (AIV.8) et en calculant l'intégrale sur $\rho$ de la même façon que ci-dessus, nous obtenons pour la contribution de $B_2(\rho)$ à $C_\nu^{2p}$ :

$$i\,\frac{\pi}{4}\,(-1)^p\,\bar{\mu}_{2p}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1/2)}\,\frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\nu/2+3/2)}\int_0^1 (1-x^2)\,\frac{d}{dx}\,P_\nu(x)\,\frac{d}{dx}\,P_{2p}(x)\,dx$$

(AIV.12)

Une intégration par parties et l'équation différentielle de Legendre fournissent la relation suivante, où nous avons remplacé $\bar{\mu}_{2p}$ par son expression (I.3.28) :

$$2i(-1)^p(2p+1/2)\,\frac{\Gamma(p+3/2)}{\Gamma(p)}\,\frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\nu/2+3/2)}\int_0^1 P_\nu(x)\,P_{2p}(x)\,dx$$

(AIV.13)

Une relation bien connue permet enfin de calculer la contribution de $B_2(\rho)$ :

$$-\frac{1}{2}\,i\,\bar{\mu}_{2p}\,\frac{\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\nu/2+3/2)}\,\frac{\Gamma(1+\nu/2)}{\Gamma(1/2+\nu/2)}\,\frac{2p(2p+1)}{(2p-\nu)(2p+\nu+1)}\,\sin\nu\,\frac{\pi}{2} \qquad \text{(AIV.14)}$$

La contribution de $B_1(\rho)$ est beaucoup plus facile à calculer et résulte immédiatement d'une formule connue [19]. On obtient

$$\frac{1}{2}\,\bar{\mu}_{2p}\,\frac{\Gamma(\nu/2+1)\Gamma(\nu/2)}{\Gamma(\nu/2+1/2)\Gamma(\nu/2+3/2)}\,\sin\pi\,\frac{\nu}{2} \qquad \text{(AIV.15)}$$

En ajoutant (AIV.14) et (AIV.15), nous obtenons enfin l'expression de $C_\nu^{2p}$ :

$$C_\nu^{2p} = -i(-1)^p\,2(2p+1/2)\left[\frac{\Gamma(p+1/2)}{\Gamma(p+1)}\,\frac{\Gamma(\nu/2+1)}{\Gamma(\nu/2+1/2)}\right]^2\,\frac{\sin\pi/2(\nu-2p)}{\pi/2\,(\nu-2p)(\nu+2p+1)} \qquad \text{(AIV.16)}$$

Toutes les preuves de convergence, et, d'une manière générale, les preuves de validité des calculs effectués s'obtiennent immédiatement à partir des résultats de la section (I.1.2).

APPENDICE AV.

Nous étudierons ici le comportement asymptotique, pour les grandes valeurs de $|\nu|$, des séries suivantes :

$$S = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\gamma_q}{(\nu-q)(\nu+q+2\alpha)} \qquad \alpha > 0 \qquad \text{(AV.1)}$$

où $|\gamma_q|$ est borné par $C\, q^{-\beta}$ ($\beta > -1$), et où $\nu$ prend ses valeurs dans le plan complexe, excepté le voisinage de l'axe réel : pour fixer les idées nous excluerons une bande $|\text{Im } \nu| < \varepsilon_o$, où $\varepsilon_o$ est un nombre fixé. Soit $\lambda$ la partie réelle de $(\nu+\alpha)$ et $\mu$ sa partie imaginaire. Le module de S peut être borné de la manière suivante :

$$|S| \leq \sum_{q=0}^{\infty} |\gamma_q| \left\{ \left[ \lambda^2 + \mu^2 - (q+\alpha)^2 \right]^2 + 4\,\mu^2 (q+\alpha)^2 \right\}^{-1/2} \qquad \text{(AV.2)}$$

ou

$$|S| \leq \sum_{q=0}^{\infty}{}' |\gamma_q| \left[ \lambda^2 + \mu^2 - (q+\alpha)^2 \right]^{-1} + C|\nu|^{-1-\beta} \qquad \text{(AV.3)}$$

ou le signe "prime" signifie qu'on a exclu de la sommation les 2 valeurs de q qui encadrent $q + \alpha = (\lambda^2+\mu^2)^{1/2}$. Il résulte de l'appendice (AI.2) que la somme peut être bornée par $(C|\nu|^{-1-\beta+\varepsilon} + C|\nu|^{-2})$.

Il est facile de déduire de cette étude le comportement asymptotique des séries suivantes pour les grandes valeurs de $|\nu|$, y compris quand $\nu$ est sur l'axe réel positif :

$$S_1 = \sin \nu \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{2n}}{(\nu-2n)(\nu+2n+\alpha)} \qquad \text{(AV.4)}$$

$$S_2 = \cos \nu \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma_{2n+1}}{(\nu-2n-1)(\nu+2n+1+\alpha)} \qquad \text{(AV.5)}$$

L'axe réel négatif étant exclu comme plus haut, la même analyse est valable tant que $|\text{Im } \nu| > \varepsilon_o$. Pour $|\text{Im}| < \varepsilon_o$, nous séparerons dans les séries $S_1$ ou $S_2$ les termes voisins du zéro du dénominateur. La somme restante peut être traitée comme ci-dessus, tandis que le module des termes séparés est de l'ordre de $C|\nu|^{-\beta-1}$, de sorte que nous pouvons écrire en général :

$$\left.\begin{aligned} |S_1| &< \left|\sin \nu \frac{\pi}{2}\right| \left[ C\,|\nu|^{-\beta-1+\varepsilon} + C\,|\nu|^{-2} \right] \qquad \text{pour } |\text{Im } \nu| > \varepsilon_o \\ |S_1| &< C\,|\nu|^{-\beta-1+\varepsilon} + C\,|\nu|^{-2} \qquad \text{pour } \text{Re } \nu > 0, |\text{Im } \nu| < \varepsilon_o \end{aligned}\right\} \qquad \text{(AV.6)}$$

APPENDICE AVI

Nous donnons dans cet appendice un certain nombre de calculs élémentaires, mais ennuyeux et parfois longs à rétablir, que nous avons fréquemment utilisés dans la 1ère partie de cette thèse.

Nous partons de f(r,r') définie par :

$$\left.\begin{aligned} D_o(r)\ f'r,r') &= D_o(r')\ f(r,r') \\ f(r,0) &= f(0,r') = 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(AVI.1)}$$

et nous cherchons les propriétés de K(r,r') définie par :

$$K(r,r') = f(r,r') - \int_o^r dr_1\ r_1^{-2}\ K(r,r_1)\ f(r_1,r') \qquad \text{(AVI.2)}$$

On admet avoir démontré la double dérivabilité de K(r,r') dans les domaines considérés. On a posé

$$D_o(r) = r^2\ (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 1) \qquad \text{(AVI.3)}$$

$$D(r) = r^2\ (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + 1 - V(r)) \qquad \text{(AVI.4)}$$

où V(r) est pour l'instant une fonction quelconque.

1) Il est facile de montrer que

$$r^2\ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ K(r,\rho)\ f(\rho,r') = \qquad \text{(AVI.5)}$$

$$r^2\ \frac{\partial}{\partial r}\left[r^{-2}\ K(r,r)\ f(r,r')\right] + f(r,r')\ \frac{\partial}{\partial r}\left[K(r,\rho)\right]_{\rho=r} + \int_o^r \rho^{-2}\ d\rho\ f(\rho,r')\ r^2\ \frac{\partial^2}{\partial r^2}\ K(r,\rho)$$

2) Deux intégrations par parties conduisent au résultat suivant :

$$\int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\left[\rho^2\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\ K(r,\rho)\right] f(\rho,r') = \qquad \text{(AVI.6)}$$

$$\left[(\frac{\partial}{\partial \rho}\ K(r,\rho))\ f(\rho,r')\right]_o^r - \left[K(r,\rho)\ \frac{\partial}{\partial \rho}\ f(\rho,r')\right]_o^r + \int_o^r d\rho\ K(r,\rho)\ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}\ f(\rho,r')$$

3) Calcul de $D(r)\ K(r,r')$

En appliquant $D(r)$, donné par (AVI.3), à $K(r,r')$ donné par (AVI.2), on obtient :

$$D(r)\ f(r,r') - r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ K(r,\rho)\ f(\rho,r') - r^2(1 - V(r)) \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ K(r,\rho)\ f(\rho,r')$$

et, en tenant compte de (AVI.5) :

$$\begin{aligned} D(r)\ K(r,r') = D_o(r)\ f(r,r') - r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left[r^{-2}\ K(r,r)\ f(r,r')\right] \\ - f(r,r')\left[\frac{\partial}{\partial r}\ K(r,\rho)\right]_{\rho=r} - \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\left[D(r)\ K(r,\rho)\right] f(\rho,r') \end{aligned} \qquad \text{(AVI.7)}$$

4) Calcul de $D_o(r')\ K(r,r')$

A partir de (AVI.3) et de (AVI.2), on peut écrire :

$$D_o(r')\ K(r,r') = D_o(r')\ f(r,r') - \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ K(r,\rho)\ D_o(r')\ f(\rho,r')$$

ou encore, en tenant compte de (AVI.1)

$$D_o(r')\ K(r,r') = D_o(r)\ f(r,r') - \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ K(r,\rho)\ D_o(\rho)\ f(\rho,r')$$

En utilisant alors (AVI.3) et (AVI.6) dans l'intégrale, on trouve :

$$\begin{aligned} D_o(r')\ K(r,r') = D_o(r)\ f(r,r') - \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ f(\rho,r')\ D_o(\rho)\ K(r,\rho) \\ + \left[\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\ K(r,\rho)\right) f(\rho,r')\right]_o^r - \left[K(r,\rho)\ \frac{\partial}{\partial \rho}\ f(\rho,r')\right]_o^r \end{aligned} \qquad \text{(AVI.8)}$$

5) Valeurs de $K(r,r')$ aux limites nulles

Supposons que $f(r,r')$ puisse être mis sous la forme $(rr')^\alpha\ \phi(r,r')$ où $|\phi(r,r')|$ est bornée par $M(r')$ quand $r$ est dans un certain intervalle $(0,r_M)$ contenant l'origine, et où $M(r')$ est elle-même majorée par $M$ quand $r'$ est elle-même dans l'intervalle $(0,r_M)$. Cherchons alors la solution de l'équation (AVI.2) sous la forme $(rr')^\alpha\ k(r,r')$. On a :

$$k(r,r') = \phi(r,r') - \int_o^r d\rho\ \rho^{2\alpha-2}\ k(r,\rho)\ \phi(\rho,r') \qquad \text{(AVI.9)}$$

Pourvu que $\alpha$ soit supérieur à 1/2, il existe une valeur $r_o$ de r en-dessous de laquelle la série de Neuman converge :

$$\phi(r,r') - \int_o^r d\rho_1\, \rho_1^{2\alpha-2}\, \phi(r,\rho_1)\, \phi(\rho_1,r') + \int_o^r d\rho_2 \rho_2^{2\alpha-2}\, \phi(\rho_2,r') \int_o^r d\rho_1 \rho_1^{2\alpha-2}\, \phi(r,\rho_1)\, \phi(\rho_1,\rho_2)$$

$$- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En effet, si on indice 0 le premier terme, le terme de rang n de cette série est majoré par

$$M(r')\left[\frac{M\, r^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)}\right]^n$$

Ainsi, pourvu que $\alpha$ soit supérieur à 1/2 et $r^{(2\alpha-1)}$ inférieur à $\frac{2\alpha-1}{M}$, K(r,r') est majorée par la série convergente

$$|K(r,r')| < M(r')\, r^\alpha\, r'^\alpha \left[1 + \frac{M\, r^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \ldots.\right] \qquad \text{(AVI.10)}$$

De la même façon, supposons que $\frac{\partial}{\partial r'} f(r,r')$ peut être mis sous la forme $r^\alpha\, r'^{\alpha-1}\, \bar{\phi}(r,r')$, où $|\bar{\phi}(r,r')|$ est majorée par $\bar{M}(r')$ quand $r \in (0,r_M)$, et $\bar{M}(r')$ est majorée par $\bar{M}$ quand $r' \in (0,r_M)$. Cherchant la solution de l'équation obtenue en dérivant les 2 membres de (AVI.2) sous la forme $r^\alpha\, r'^{\alpha-1}\, \bar{k}(r,r')$, on voit que l'équation satisfaite par $\bar{k}(r,r')$ peut être traitée de la même façon que (AVI.9). Au moins dans le domaine où les series de Neuman convergent, il est facile d'identifier $(rr')^\alpha\, r'^{-1}\, \bar{k}(r,r')$ avec $\frac{\partial}{\partial r'} K(r,r')$ et d'en déduire la majoration suivante, valable pour $\alpha < 1/2$ et $r^{(2\alpha-1)} < \frac{2\alpha-1}{\bar{M}}$ :

$$\left|\frac{\partial}{\partial r'} K(r,r')\right| < \bar{M}(r')\, r^\alpha\, r'^{\alpha-1}\left[1 + \frac{\bar{M}\, r^{2\alpha-1}}{2\alpha-1} + \ldots\right] \qquad \text{(AVI.11)}$$

Les bornes (AVI.10) et (AVI.11) permettent de démontrer que

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial\rho} K(r,\rho)\right) f(\rho,r')\right]_{\rho=0} - \left[K(r,\rho)\, \frac{\partial}{\partial\rho}\, f(\rho,r')\right]_{\rho=0} = 0$$

ce qui permet de simplifier l'expression (AVI.8)

6) Equation aux dérivées partielles satisfaite par K(r,r')

On peut réécrire les relations (AVI.7) et (AVI.8) sous les formes suivantes :

$$D(r)\,K(r,r') = D_o(r)\,f(r,r') - K(r,r)\,\frac{\partial}{\partial r} f(r,r') - \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\, f(\rho,r')\, D(r)\, K(r,\rho)$$

$$- f(r,r')\left\{ r^2\, V(r) + r^2\,\frac{d}{dr}\,(r^{-2}\, K(r,r)) + \left[\frac{\partial}{\partial r}\ K(r,\rho)\right]_{\rho=r} \right\}$$

$$D_o(r')\,K(r,r') = D_o(r)\,f(r,r') - K(r,r)\,\frac{\partial}{\partial r} f(r,r') - \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\, f(\rho,r')\, D(\rho)\, K(r,\rho)$$

$$- f(r,r')\left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \rho}\ K(r,\rho)\right]_{\rho=r} \right\}$$

Si on définit une fonction $\chi(r,r')$ par :

$$\chi(r,r') = \left[D(r) - D_o(r')\right] K(r,r') \qquad \text{(AVI.12)}$$

on voit que cette fonction satisfait l'équation :

$$\chi(r,r') = -\int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\, \chi(r,\rho)\, f(\rho,r') - f(r,r')\left[ r^2\, V(r) + 2r\,\frac{d}{dr}\ r^{-1}\, K(r,r)\right] \qquad \text{(AVI.13)}$$

Si on choisit $V(r)$ égal à $-\,2r^{-1}\,\frac{d}{dr}\ r^{-1}\, K(r,r)$, l'équation (AVI.13) se réduit à :

$$\chi(r,r') = -\int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ \chi(r,\rho)\, f(\rho,r') \qquad \text{(AVI.14)}$$

dont la solution est nulle dans les domaines d'analyticité de $V(r)$ d'apres les analyses des chapitres II et III, de sorte que

$$\begin{cases} D(r)\,K(r,r') = D_o(r')\,K(r,r') \\ \\ K(r,0) = K(0,r') = 0 \end{cases} \qquad \text{(AVI.15)}$$

7) Définissons maintenant $\phi_\nu(r)$ par

$$\phi_\nu(r) = u_\nu(r) - \int_o^r d\rho\ \ \rho^{-2}\, K(r,\rho)\, u_\nu(\rho) \qquad \text{(AVI.16)}$$

On a : $D(r)\,\phi_\nu(r) = D_o(r)\,u_\nu(r) - r^2\, V(r)\, u_\nu(r) - \int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\, u_\nu(\rho)\, D(r)\, K(r,\rho)$

$$- r^2\ \frac{d}{dr}\left[r^{-2}\, K(r,r)\, u_\nu(r)\right] - u_\nu(r)\left[\frac{\partial}{\partial r}\ K(r,\rho)\right]_{\rho=r} \qquad \text{(AVI.17)}$$

8) L'expression $\int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ u_\nu(\rho)\ D(r)\ K(r,\ )$ est égale à $\int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ u_\nu(\rho)\ D_o(\rho)\ K(r,\rho)$ d'après (AVI.15), ou encore $\int_o^r d\rho\ u_\nu(\rho)\ (\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + 1)) K(r,\rho)$, soit, en intégrant par parties :

$$\left[u_\nu(\rho)\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ K(r,\rho)\right]_o^r - \left[K(r,\rho)\ \frac{\partial}{\partial\rho}\ u_\nu(\rho)\right]_o^r + \int_o^r \rho^{-2}\ d\rho\ K(r,\rho)\ D_o(\rho)\ u_\nu(\rho)$$

ou encore

$$u_\nu(r)\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\ K(r,\rho)\right]_{\rho=r} - K(r,r)\ \frac{d}{dr}\ u_\nu(r) + \int_o^r \rho^{-2}\ d\ K(r,\rho)\ D_o(\rho)\ u_\nu(\rho)$$

si l'on remarque que les valeurs des expressions entre crochets dans la relation précédente sont nulles d'après (AVI.10) et (AVI.11).

Si on insère cette expression dans (AVI.17), et si on tient compte du fait que $u_\nu(r)$ est une fonction propre de $D_o(r)$, correspondant à la valeur propre $\nu(\nu + 1)$, on obtient :

$$D(r)\ \phi_\nu(r) = \nu(\nu + 1)\ u_\nu(r) - \nu(\nu + 1)\int_o^r d\rho\ \rho^{-2}\ K(r,\rho)\ u_\nu(\rho)$$

$$- u_\nu(r)\left[r^2\ V(r) + r^2\ \frac{d}{dr}\ (r^{-2}\ K(r,r)) + \frac{d}{dr}\ K(r,r)\right]$$

Si $V(r)$ est égal à $-2r^{-1}\ \frac{d}{dr}\ r^{-1}\ K(r,r)$, l'expression entre crochets est nulle et, en se reportant à (AVI.16), on voit que

$$D(r)\ \phi_\nu(r) = \nu(\nu + 1)\ \phi_\nu(r) \qquad \text{(AVI.18)}$$

Tous les raisonnements et démonstrations de cet appendice s'étendent facilement dans les domaines d'analyticité de $K(z,z')$.

## APPENDICE AVII

Nous nous proposons de calculer

$$I = \int_o^\infty \left(\frac{d}{d\rho}\ (J_{\ell+1/2}(\rho)\ J_{\ell+1/2}(\rho))\right) J_{\ell'+1/2}(\rho)\ J_{\ell'+1/2}(\rho)\ d\rho \qquad \text{(AVII.1)}$$

où $\ell$ et $\ell'$ sont des variables continues et $(\ell + \ell' + 1) > 0$.

Pour faire ce calcul, nous allons utiliser la relation (20) :

$$\frac{d}{d\rho} J_{\ell+1/2}(\rho) = 1/2 \left[ J_{\ell-1/2}(\rho) - J_{\ell+3/2}(\rho) \right]$$

et la formule de Neuman (21), pour obtenir :

$$J_{\ell'+1/2}(\rho) \frac{d}{d\rho} J_{\ell+1/2}(\rho) = \pi^{-1} \left\{ \int_0^{\pi/2} J_{\ell+\ell'}(2\rho\cos\theta) \cos(\ell-\ell'-1)\theta \, d\theta - \int_0^{\pi/2} J_{\ell+\ell'+2}(2\rho\cos\theta) \cos(\ell-\ell'+1)\theta \, d\theta \right\}$$

$$J_{\ell+1/2}(\rho) J_{\ell'+1/2}(\rho) = 2 \pi^{-1} \int_0^{\pi/2} J_{\ell+\ell'+1}(2\rho\cos\alpha) \cos(\ell-\ell')\alpha \, d\alpha$$

L'insertion de ces formules dans (AVII.7) conduit à :

$$I = B - C \qquad \text{où}$$

$$B = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \cos((\ell-\ell'-1)\theta) \, d\theta \int_0^{\pi/2} \cos((\ell-\ell')\alpha) \, d\alpha \int_0^{\infty} J_{\ell+\ell'}(2\rho\cos\theta) J_{\ell+\ell'+1}(2\rho\cos\alpha) \, d\rho$$

$$C = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \cos((\ell-\ell'+1)\theta) \, d\theta \int_0^{\pi/2} \cos((\ell-\ell')\alpha) \, d\alpha \int_0^{\infty} J_{\ell+\ell'+1}(2\rho\cos\alpha) J_{\ell+\ell'+2}(2\rho\cos\theta) \, d\rho$$

Or, une formule connue (22), valable pour $(\ell+\ell'+1) > 0$, donne :

$$\int_0^{\infty} J_q(ax) J_{q+1}(bx) \, dx = \begin{cases} 0 \text{ pour } b < a \\ a^q b^{-q-1} \text{ pour } a < b \end{cases}$$

Donc :

$$B = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \cos((\ell-\ell'-1)\theta) \, d\theta \int_0^{\theta} \cos((\ell-\ell')\alpha) \, d\alpha (\cos\theta)^{\ell+\ell'} (\cos\alpha)^{-(\ell+\ell'+1)}$$

$$C = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \cos((\ell-\ell'+1)\theta) \, d\theta \int_0^{\pi/2} \cos((\ell-\ell')\alpha) \, d\alpha \, (\cos\alpha)^{\ell+\ell'+1} (\cos\theta)^{-(\ell+\ell'+2)}$$

En permutant les deux intégrales et les noms des deux indices de sommation dans C, on trouve

$$C = \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \cos((\ell-\ell')\theta) \, d\theta \, (\cos\theta)^{\ell+\ell'+1} \int_0^{\theta} \cos((\ell-\ell'+1)\alpha) \, (\cos\alpha)^{-(\ell+\ell'+2)} \, d\alpha$$

et on en déduit :

$$I = \frac{2}{\pi^2} \int_o^{\pi/2} (\cos\theta)^{\ell+\ell'} \, d\theta \int_o^{\theta} (\cos\alpha)^{-\ell-\ell'-2} \, d\alpha \Big\{ \cos((\ell-\ell'-1)\theta).\cos((\ell-\ell')\alpha)\cos\alpha \; - \; - \cos((\ell-\ell')\theta) \cos((\ell-\ell'+1)\alpha) \cos\theta \Big\}$$

ou $I = E + F$ où

$$E = \frac{2}{\pi^2} \int_o^{\pi/2} (\cos\theta)^{\ell+\ell'} \, d\theta \int_o^{\theta} (\cos\alpha)^{-(\ell+\ell'+2)} \sin((\ell-\ell')\theta) \cos((\ell-\ell')\alpha) \sin\theta \cos\alpha \, d\alpha$$

$$F = \frac{2}{\pi^2} \int_o^{\pi/2} (\cos\theta)^{\ell+\ell'} \, d\theta \int_o^{\theta} (\cos\alpha)^{-(\ell+\ell'+2)} \cos((\ell-\ell')\theta) \sin((\ell-\ell')\alpha) \sin\alpha \cos\theta \, d\alpha$$

Des intégrations par parties permettent de simplifier E et F. On trouve ainsi

$$E = -\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{\ell+\ell'+1} (\cos\tfrac{\pi}{2})^{(\ell+\ell'+1)} \sin((\ell-\ell'))\tfrac{\pi}{2} \int_o^{\pi/2} (\cos\alpha)^{-(\ell+\ell'+1)} \cos((\ell-\ell')\alpha) \, d\alpha$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \frac{\ell-\ell'}{\ell+\ell'+1} \int_o^{\pi/2} (\cos\theta)^{(\ell+\ell'+1)} \cos((\ell-\ell')\theta) \, d\theta \int_o^{\theta} (\cos\alpha)^{-(\ell+\ell'+1)} \cos((\ell-\ell')\alpha) \, d\alpha$$

$$+ \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{\ell+\ell'+1} \int_o^{\pi/2} \sin((\ell-\ell')\theta) \cos((\ell-\ell') \,) \, d\theta$$

et il est facile de voir que le premier terme de cette expression est nul. De la même façon :

$$F = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{\ell+\ell'+1} \int_o^{\pi/2} \cos((\ell-\ell')\theta)\sin((\ell-\ell')\theta) \, d\theta$$

$$- \frac{2}{\pi^2} \frac{\ell-\ell'}{\ell+\ell'+1} \int_o^{\pi/2} \cos((\ell-\ell')\theta)(\cos\theta)^{\ell+\ell'+1} \, d\theta \int_o^{\theta} \cos((\ell-\ell')\alpha)(\cos\alpha)^{-(\ell+\ell'+1)} d\alpha$$

En groupant ces deux termes, on obtient :

$$I = E + F = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{(\ell+\ell'+1)} \int_o^{\pi/2} \sin(2(\ell-\ell')\theta) \, d\theta$$

ou

$$I = \frac{2}{\pi^2} \frac{1 - \cos((\ell-\ell')\pi)}{2\left[(\ell+1/2)^2 - (\ell'+1/2)^2\right]} \qquad \text{(AVII.2)}$$

APPENDICE AVIII

Supposons que zV(z) est une fonction analytique dans un cercle $|z| < \Gamma$, et définissons K(z,z) à partir de V(z) par la formule suivante :

$$K(z,z) = -\frac{1}{2} z \int_0^z u\, V(u)\, du \qquad \text{(AVIII.1)}$$

Nous voulons prouver ici que l'on peut trouver pour K(z,z) le développement en série :

$$K(z,z) = \sum_0^\infty s_\ell\, \phi_\ell(z)\, u_\ell(z) + \sum_0^\infty s_{\ell+1/2}\, \phi_{\ell+1/2}(z)\, u_{\ell+1/2}(z) \qquad \text{(AVIII.2)}$$

qui converge dans le cercle $|z| < \Gamma$, et que les coefficients de ce développement sont uniques. Pour le démontrer, nous établirons tout d'abord certaines majorations pour les coefficients des développements de Taylor des fonctions qui interviennent dans (AVIII.2). Définissons des fonctions auxiliaires $c_\lambda(z)$ égales à $z^{-\lambda-1}\, \phi_\lambda(z)$, et solutions de l'équation suivante, où D(z) est défini comme dans (AVI.3)

$$L(z)\, c_\lambda(z) \equiv \left[ z^{-\lambda-1}\, D(z)\, z^{+1} - \lambda(\lambda+1) \right] c_\lambda(z) = 0 \qquad \text{(AVIII.3)}$$

La méthode de Frobenius [23] nous conduit directement au résultat. Nous allons l'exposer dans le cas considéré :

Nous cherchons pour les fonctions $c_\lambda(z)$ un développement de la forme :

$$c_\lambda(z) = \sum_p c_\lambda^p\, z^{p+\rho} \qquad \text{(AVIII.4)}$$

où $c_\lambda^o$ est un facteur de normalisation $N_\lambda$ différent de zéro. Désignons pour simplifier par w(z) la fonction analytique $z^2(1 - V(z))$, et définissons de la manière suivante un ensemble de coefficients $f_\lambda^n$ :

$$z^{-p-\rho}\, L\, z^{p+\rho} = \sum_{n=0}^\infty f^n(p+\rho)\, z^n = (p+\rho)(2\lambda+p+1+\rho) + w(z)$$

L'équation (AVIII.3) est équivalente au système :

$$\begin{aligned} & c_\lambda^o\, f_\lambda^o(\rho) = \rho(2\lambda+1+\rho) = 0 \\ & \vdots \\ & c_\lambda^p\, f_\lambda^o(\rho+p) + c_\lambda^{p-1}\, f_\lambda^1(\rho+p-1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + c_\lambda^o\, f_\lambda^p(\rho) = 0 \\ & \vdots \end{aligned} \qquad \text{(AVIII.6)}$$

Pour la solution qui nous intéresse, $\rho$ est nul. Par ailleurs, les $f_\lambda^n(\rho+p)$ ne dépendent que de n pour n plus grand que 1. Nous utiliserons donc désormais la notation simplifiée $f_n$. Désignons par M(R) la borne supérieure de $|w'(z)|$ sur le cercle $|z| = R = \Gamma-\varepsilon$.

Le théorème de Cauchy nous permet d'obtenir des bornes supérieures pour les $f_n$ :

$$|f_{n+1}| = \left|\frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{w'(z)}{z^{n+1}}\, dz\right| \leq \frac{M(R)}{R^n} \qquad \text{(AVIII.7)}$$

Les relations suivantes définissent donc des bornes supérieures $C_\lambda^p$ pour les $c_\lambda^p$ :

$$\begin{aligned} C_\lambda^{p+1} &= \frac{M(R)}{(p+1)(2\lambda+p+2)} \left\{ C_\lambda^p + C_\lambda^{p-1} R^{-1} + \ldots\ldots C_\lambda^o R^{-p} \right\} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ C_\lambda^1 &= \frac{M(R)}{2\lambda+2} C_\lambda^o \\ C_\lambda^o &= |N_\lambda| \end{aligned} \qquad \text{(AVIII.8)}$$

Ce système est facile à résoudre :

$$C_\lambda^{p+1} = |N_\lambda| \prod_{n=0}^{n=p} \left[ \frac{M(R)}{(n+1)(2\lambda+n+2)} + \frac{n(2\lambda+n+1)}{(n+1)(2\lambda+n+2)\, R} \right] \qquad \text{(AVIII.9)}$$

Si $\lambda$ est assez grand, RM(R) est plus petit que $(2\lambda+1)$. Si nous remplaçons dans (AIV.9) le nombre M(R) par $(2\lambda+n+1)R^{-1}$ sauf dans le facteur pour lequel n = 0, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$|c_\lambda^p| \leq C_\lambda^{p+1} < |N_\lambda|\, M(R)(2\lambda+p+2)^{-1} R^{-p} \qquad \text{(AVIII.10)}$$

Comme les fonctions $u_\lambda(z)$ sont des solutions de (AVIII.3) si l'on remplace V(z) par 0, et que 0 est une fonction entière, on peut obtenir une inégalité analogue à (AIV.10) pour les coefficients de Taylor de $z^{-\lambda-1} u_\lambda(z)$. Cette inégalité peut être écrite quel que soit $\lambda$ si l'on remplace $M(R)\,|N_\lambda|$ par un majorant B(R) suffisamment grand. Considérons alors le produit :

$$\tau_{2\lambda}(z) = \phi_\lambda(z)\, u_\lambda(z) = z^{2\lambda+2} \sum_{q=0}^{\infty} \tau_{2\lambda}^{2\lambda+q} z^q \qquad \text{(AVIII.11)}$$

Si $B_1(R)$ et $B_2(R)$ sont associés respectivement à $\phi_\lambda(z)$ et $u_\lambda(z)$, le coefficient $\tau_{2\lambda}^{2\lambda+q}$ $(q>0)$ peut être majoré par :

$$R^{-q}\ B_1(R)\ B_2(R)\ \sum_{p=1}^{q-1} (2\lambda+2+p)^{-1}\ (2\lambda+q-p+2)^{-1} + (2\lambda+q+2)^{-1}\left[(B_1(R))^{-1} + (B_2(R))^{-1}\right]$$

La comparaison de la 1ère série avec une intégrale et quelques majorations montrent sans difficulté que cette expression est majorée par :

$$|\tau_{2\lambda}^{2\lambda+q}| < R^{-q}\ B_3(R)\ \frac{\mathrm{Log}(2\lambda+2+q)}{2\lambda+2+q} \qquad \text{(AVIII.12)}$$

où $B_3(R)$ est convenablement choisi.

Revenons maintenant à $K(z,z)$ défini par (AVIII.1). Il est bien évident que $K(z,z)$ est analytique dans le cercle $|z| < \Gamma$, de sorte que l'on peut trouver pour ses coefficients de Taylor une majoration analogue à (AVIII.7) :

$$K(z,z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} k_n\ z^n \qquad \text{(AVIII.13)}$$

$$|k_n| < K(R_1)\ R_1^{-n} \qquad \text{où} \quad R_1 < \Gamma \qquad \text{(AVIII.14)}$$

Il est maintenant facile de développer $K(z,z)$ sur les fonctions $\tau_p(z)$ : il suffit d'égaler les coefficients de $z^{n+2}$ dans les 2 membres de la relation suivante :

$$\sum_{p=0}^{\infty} \sigma_p\ \tau_p(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} k_n\ z^n \qquad \text{(AVIII.15)}$$

On est ramené au système triangulaire suivant :

$$\sigma_n\ \tau_n^n = k_n - \sum_{p=0}^{n-1} \sigma_p\ \tau_p^n \qquad \text{(AVIII.16)}$$

Si on remplace chaque terme de ce système par une borne supérieure de son module, en faisant usage des majorations (AVIII.12) et (AVIII.14), et en choisissant $R_1 = \alpha^{-1} R$ ($\alpha<1$), on obtient un système majorant :

$$\frac{n+2}{\mathrm{Log}(n+2)}\ v_n = \frac{(n+2)}{\mathrm{Log}(n+2)}\ \alpha^n\ K(R_1) + B_3(R) \sum_{p=0}^{n-1} v_p \qquad \text{(AVIII.17)}$$

où $$|v_n| > R^n\ |\tau_n^n\ \sigma_n| \qquad \text{(AVIII.18)}$$

Le premier terme de (AVIII.17) tend vers 0 à $\infty$ et peut donc être remplacé par un majorant $K_2(R)$. Le système (AVIII.17) est alors facile à résoudre et montre que les $v_n$ sont indépendants de n, de sorte que l'on peut trouver S(R) tel que

$$|\sigma_n| < |\tau_n^n|^{-1} R^{-n} S(R) \qquad (R < \Gamma-\varepsilon) \qquad \text{(AVIII.19)}$$

Les résultats annoncés au début de cet appendice s'en déduisent immédiatement. En particulier, la méthode de construction, et la convergence des développements montrent que les coefficients $s_\ell$ et $s_{\ell+1/2}$, égaux resp. à $\sigma_{2\ell}$ et $\sigma_{2\ell+1}$, sont uniques. Si $w(z)$ est une fonction paire, il est facile de voir que les $f_\lambda^{2p+1}$ sont nuls, et par voie de conséquence les $c_\lambda^{2p+1}$, ainsi que les $s_\ell$, puisque les produits $\phi_\ell(z)\, u_\ell(z)$ sont des fonctions paires de z, tandis que $K(z,z)$ est une fonction impaire de z.

Extension au cas "rationnel"

Nous voulons maintenant étendre nos résultats au cas où V est une fonction analytique de $z^\alpha$, où $\alpha$ est un nombre rationnel, dans un cercle $|z| < \overline{\Gamma}$. Il est clair qu'on peut se limiter au cas où $\alpha$ est de la forme $m^{-1}$, m étant un nombre entier. On peut même se limiter au cas où ce nombre entier est impair, compte tenu du fait que le développement attendu inclut à la fois les indices entiers et les indices demi-entiers. Posons donc $z = t^m$ et supposons que $z\,V(z)$ soit une fonction analytique de t. L'équation (AVIII.3) sera remplacée par l'équation obtenue en posant partout $z = t^m$, c'est-à-dire en faisant les transformations schématisées par :

$$D(z) \rightarrow \overline{D}(t)$$

$$L(z) \rightarrow \overline{L}(t)$$

La méthode de Frobenius se développe de la même façon que précédemment, c'est-à-dire que l'on écrira :

$$\overline{L}(t)\ \overline{c}_\lambda(t) = \overline{L}(t) \sum_q c_\lambda^q\ t^{q+\sigma} = 0$$

on calculera

$$t^{-q-\sigma}\ \overline{L}(t)\ t^{q+\sigma} = \sum_{k=0}^{\infty} f_\lambda^k(q+\sigma)\ t^k = \frac{q+\sigma}{m}\left(2\lambda+1+\frac{q+\sigma}{m}\right) + \overline{w}(t)$$

où $\overline{w}(t)$ est égal à :

$$\overline{w}(t) = t^{2m}\,(1 - \overline{V}(t)) \qquad \text{(AVIII.20)}$$

Pourvu que $\overline{w}(t)$ n'ait pas de terme constant, $\frac{q+\sigma}{m}\left(2\lambda+1+\frac{q+\sigma}{m}\right)$ est égal à $f_\lambda^0(q+\sigma)$, tandis que $f_\lambda^k(q+\sigma)$ pour $k > 0$ ne dépend que de k. On peut établir des majorations des $f_\lambda$ comme (AVIII.7)

et les systèmes donnant les coefficients $c^p$ et $C^p$ sont analogues aux systèmes (AVIII.6) et (AVIII.8). En particulier, ce dernier devient :

$$\begin{cases} C_\lambda^{p+1} = \dfrac{m^2\,\overline{M}\,(\overline{R})}{(p+1)\,(m(2\lambda+1)+p+1)} \left[ C_\lambda^p + C_\lambda^{p-1}\,\overline{R}^{-1} + \dots C_\lambda^o\,\overline{R}^{-p} \right] \\ \quad \vdots \\ C_\lambda^1 = \dfrac{m^2\,\overline{M}\,(\overline{R})}{m(2\lambda+1)+1} \\ \quad \vdots \\ C_\lambda^o = |N_\lambda| \end{cases} \qquad \text{(AVIII.21)}$$

La théorie est donc la même que précédemment, avec les modifications

$$\lambda \to \Lambda \sim \lambda m$$

$$M(R) \to m^2\,\overline{M}\,(\overline{R})$$

Les autres calculs s'ensuivent trivialement, ainsi que la formule finale :

$$K(z,z) = \sum_{p=0}^{\infty} C_{p/m}\; u_{p/m}\; \phi_{p/m} + \sum_{p=0}^{\infty} C_{\frac{p+1/2}{m}}\; u_{\frac{p+1/2}{m}}\; \phi_{\frac{p+1/2}{m}} \qquad \text{(AVIII.22)}$$

valable quand z V(z) est une fonction analytique de t.

Remarquons enfin que puisqu'il suffit que $\overline{w}(t)$ soit nul à l'origine, donc soit comme t à l'origine, ce qui suppose seulement que $z^{2-1/m}\,V(z)$ soit fini à l'origine, on peut étendre la théorie dans ce cas. On trouve alors pour K(z,z) qui est comme $z^{1+1/m}$ à l'origine, un développement analogue à AVIII.22, mais où μ peut s'étendre, sur l'axe négatif, jusqu'à $-\frac{1}{2}+\frac{1}{2m}$ inclus :

$$K(z,z) = c_{-1/2+1/2m}\; u_{-1/2+1/2m}\; \phi_{-1/2+1/2m} + c_{-1/2+1/m}\; u_{-1/2+1/m}\; \phi_{-1/2+1/m} + \dots$$

(AVIII.23)

# APPENDICES B

## APPENDICE BI

### Propriétés de la dérivée schwarzienne

#### Définition

La dérivée schwarzienne de u par rapport à x est définie par :

$$\left\{u , x\right\} = (u')^{-1} \quad u''' - \frac{3}{2} (u')^{-2} \quad u''^2 \qquad \text{(BI.1)}$$

Toutes les formules de transformation peuvent être déduites de la suivante : soit $\chi(x)$ une autre fonction de x

$$\left\{u , x\right\} = \left\{u , \chi\right\} \chi'^2 + \left\{\chi , x\right\} \qquad \text{(BI.2)}$$

En particulier

$$\left\{\lambda , z\right\} = - \left(\frac{d\lambda}{dz}\right)^2 \left\{z , \lambda\right\} \qquad \text{(BI.3)}$$

#### Bornes

Posons

$$\begin{cases} u'^2 = A^2 \zeta^{2\beta}(1+F) & \\ u' = A \zeta^{\beta}(1+G) & \text{où } G = (1 + F)^{1/2} - 1 \\ u = B \zeta^{\beta+1} (1+H) & \text{où } H = (\beta+1) \zeta^{-\beta-1} \int_0^{\zeta} x^{\beta} G(x) \, dx \end{cases} \qquad \text{(BI.4)}$$

A est une constante donnée, F est une fonction donnée de $\zeta$, B une constante reliée à A. Il est possible de montrer que $\left\{ u^{1/(\beta+1)}, \zeta \right\}$ est borné quand $F(\zeta)$ satisfait les conditions suivantes:

$$\begin{cases} F \geq \underline{F} \qquad \zeta F' \geq \underline{\zeta F'} \qquad \Phi = 1 + \underline{F} > 0 \\ I = \Phi + 1/2\ (\beta+1)^{-1}\ \underline{\zeta F'}\ \Phi^{-1/2} > 0 \\ |F'| \leq \overline{F'} \qquad |\zeta F'| \leq \overline{\zeta F'} \\ F'' \leq \overline{F''} \qquad \zeta F'' \leq \overline{\zeta F''} \qquad \zeta F''' < \overline{\zeta F'''} \end{cases} \tag{BI.5}$$

où les bornes inférieures sont constantes, les bornes supérieures sont des constantes ou des fonctions données.

Démonstration - On peut déduire des définitions des relations entre H,G,F et leurs dérivées, dont on déduit les bornes suivantes :

$$\begin{cases} 1 + H > \Phi \qquad \zeta H' \dot{>} 1/2\ \Phi^{-1/2}\ \underline{\zeta F'} \\ |\zeta H'| < 1/2\ \Phi^{-1/2}\ \overline{\zeta F'} \ ; \ |\zeta H''| < 1/2\ \Phi^{-1/2}\ \overline{\zeta F''} + 1/4\ \overline{\zeta F'}.\ \overline{F'}\Phi^{-3/2} \\ |\zeta H'''| < 1/2\ \Phi^{-1/2}\ \overline{\zeta F'''} + 3/4\ \overline{\zeta F'}\ .\overline{F''}\ \Phi^{-3/2} + 3/8\ \Phi^{-5/2}\ \overline{\zeta F'}.\ \overline{F'}^{2} \\ |H'| < 1/2\ \Phi^{-1/2}\ F' \qquad |H''| < 1/2\ \overline{F''}\ \Phi^{-1/2} + 1/4\ \overline{F'}^{2}\ \Phi^{-3/2} \\ E = 1 + H + (\beta+1)^{-1}\ \zeta H' > I > 0 \end{cases} \tag{BI.6}$$

où le point sur l'inégalité signifie qu 'on ne la considère que pour des valeurs négatives des deux membres. Avec ces 2 bornes, la propriété proposée résulte immédiatement de l'expression suivante de $\left\{ u^{1/(\beta+1)}, \zeta \right\}$ :

$$\left\{ u^{1/\beta+1}, \zeta \right\} = \frac{E''}{E} - \frac{3}{2}\ \frac{E'^{2}}{E^{2}} + \frac{\beta}{\beta+1}\ \frac{E'}{E(1+H)} + \frac{1}{2}\ \frac{\beta^{2} + 2\beta}{(\beta+1)^{2}(1+H)} \tag{BI.7}$$

L'usage de fonctions ou de constantes appropriées pour les bornes permet d'obtenir les propriétés utilisées dans la section 4.

APPENDICE BII

## Propriétés des fonctions $\Pi_p(\cos\theta)$

De la définition (5.2.5) et à l'aide d'une formule connue [24] on tire :

$$\Pi_p(\cos\theta) = P_{p-1/2}(\cos\theta) - \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos p\pi \int_0^\infty \exp(-pt)(\cos\theta + \cosh t)^{-1/2} dt \qquad \text{(BII.1)}$$

Cette formule permet d'obtenir des développements asymptotiques de $\Pi_p$ en remplaçant $P_{p-1/2}$ par un développement asymptotique et en évaluant asymptotiquement le second terme, par exemple :

$$\Pi_p(\cos\theta) = (\theta/\sin\theta)^{1/2} J_o(p\theta) + 1/8\ (\cot\theta - \theta^{-1})\ p^{-1} J_1(p\theta) - \cos p\pi \left\{ H_o(2p\cos\theta/2) - Y_o(2p\cos\theta/2) + O(p(\pi-\theta)^2) \right\} + O(p^{-2}) \qquad \text{(BII.2)}$$

valable pour les grandes valeurs de p, $\theta < \theta_o \sim 0{,}828\ \pi$ [25], et $p(\pi-\theta) > 1$, et

$$\Pi_p(\cos\theta) = (\pi/2\ p \sin\theta)^{-1/2} \cos(p\theta - \pi/4) - (\pi\ p \cos\theta/2)^{-1} \cos p\pi + O(p^{-3/2})$$

valable pour p grand, $p\theta > 1$, et $p(\pi-\theta) > 1$.

Ces formules cessent d'être valables au voisinage de $\theta = \pi$ . Dans la formule exacte :

$$\Pi_p(\cos\theta) = \sin p\pi\ P_{p-1/2}\left[\cos(\pi-\theta)\right] + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cos p\pi \int_0^{\pi-\theta} \sin pv\ dv \left[\cos v - \cos(\pi-\theta)\right]^{-1/2} \qquad \text{(BII.4)}$$

nous pouvons évaluer l'intégrale du membre de droite, que nous désignerons par I, de la même façon que Szegö évalua un développement asymptotique uniforme [25] pour $P_\ell(\cos\theta)$, et obtenir :

$$I \sim \pi\left[\frac{\pi-\theta}{2\sin\theta}\right]^{1/2} \left\{ H_o(p(\pi-\theta)) + 1/8\ p^{-1} \left[\cot g(\pi-\theta) - (\pi-\theta)^{-1}\right] H_1(p(\pi-\theta)) \right\}$$

qui ne donne une approximation meilleure que BII.3 que si $p(\pi-\theta) < 1$, et conduit pour $\Pi_p$, par exemple à l'ordre $p^{-1}$, à :

$$\Pi_p(\cos\theta) \sim \left[\frac{\pi-\theta}{\sin(\pi-\theta)}\right]^{1/2} \left\{ \sin p\pi\ J_o(p(\pi-\theta)) + \cos p\pi\ H_o(p(\pi-\theta)) \right\}$$

Il est possible de trouver aussi des expressions hypergéométriques des $\Pi_p(\cos\theta)$ (comme des ${}_3F_2(\sin^2\theta/2)$, mais elles nous sont inutiles.

APPENDICE BIII

Comportement du déphasage JWKB pour p = 0 pour un potentiel non pair.

On sait déjà d'après (V.1.16) que la transformée d'une fonction paire $H(\lambda)$ est une fonction $\delta(p)$ analytique en p. Le problème se ramène donc à l'étude des propriétés analytiques au voisinage de (p=0) de :

$$\delta = \int_p^\infty (\lambda^2 - p^2)^{1/2}\, Q(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{(BIII.1)}$$

où $Q(\lambda)$ est une fonction analytique qui décroît plus vite que $\lambda^{-2}$ quand $\lambda \to \infty$ . Supposons alors $p < A$ et faisons la transformation suivante :

$$\delta = \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n-1/2)}{n!\Gamma(-1/2)}\, p^{2n} \int_p^A \lambda^{-2n+1}\, Q(\lambda)\, d\lambda + \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n-1/2)}{n!\Gamma(-1/2)}\, p^{2n} \int_A^\infty \lambda^{-2n+1}\, Q(\lambda)\, d\lambda \qquad \text{(BIII.2)}$$

Le deuxième terme est une fonction analytique paire de p. Puisque $Q(\lambda)$ est analytique, A peut être choisi de telle façon que le développement de Taylor de $Q(\lambda)$ converge pour $z \leq A$. Désignons par $q_i$ le coefficient de $\lambda^{2i}$ dans ce développement et remplaçons $Q(\lambda)$ dans le 1er terme.

L'intégration terme à terme donne :

$$\int_p^A \lambda^{-2n+1}\, Q(\lambda)\, d\lambda = A^{-2n+2} \sum_{i \neq n-1} q_i\, A^{2i}\, (2i - 2n + 2)^{-1} - p^{-2n+2} \sum_{i \neq n-1} q_i\, p^{2i} (2i - 2n + 2)^{-1} + q_{n-1}\, \mathrm{Log}\,(A/p)$$

où l'on a posé $q_{-1} = 0$

Reportons (BIII.3) dans le premier terme de (BIII.2) et remarquons que puisque la somme dans le 2ème terme de (BIII.3) est bornée, et puisque le développement de $(1 - x)^{1/2}$ est absolument convergent pour x = 1, nous pouvons changer l'ordre des sommations qui correspondent au second terme de (BIII.2). Nous obtenons ainsi :

$$\delta = F(p^2) + p^2\, G(p^2)\, \mathrm{Log}\, p \qquad \text{(BIII.4)}$$

où F et G sont analytiques au voisinage de l'origine.

APPENDICE BIV

## Le voisinage du point critique

Nous nous proposons d'estimer ici l'erreur sur le déphasage au voisinage du point critique. Si nous nous reportons à la section (5.4), nous voyons que nous avons seulement à tenir compte de la partie de l'erreur qui vient du voisinage du point tournant, puisque les termes centrifuges sont les mêmes dans les 2 équations reliées. On supposera comme dans le paragraphe (5.1.3) que la dérivée 3ème de $\lambda^2$ par rapport à z est assez grande, de sorte que les erreurs dues aux termes d'ordre supérieur sont négligeables. Nous utiliserons les notations des sections (1.3.4 et 3.2), auxquelles nous ajouterons les suivantes :

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{\lambda_o^2 - \lambda_1^2}{(\Delta\lambda)^2} \qquad \dfrac{t_\xi}{t_c} = T(\xi) \\ \tau_o = \left[t_o^2 + 3\, t_\xi^2\right]^{1/2} \qquad \mu = 3\,\dfrac{t_\xi}{\tau_o} \\ y = (t - t_\xi)/\tau_o \quad \Lambda_\mu(y) = y(1 + \mu y + y^2) \end{cases} \tag{BIV.1}$$

A partir des relations (5.1.25), (5.1.26) et BIV.1, nous obtenons :

$$\phi^2 = \frac{s_2\, \tau_o^3}{2z^2}\, \Lambda_\mu(y) \tag{BIV.2}$$

Comme $\tau_o \ll z$ dans la surface du noyau, il est possible de négliger les variations de z dans le dénominateur de BIV.2. Comme $|\mu| < \sqrt{3}$, $\Lambda_\mu(y)$ peut être développé en puissances de $\mu y/(1+y^2)$ et le développement de $\Lambda_\mu^{1/2}(y)$ en puissances de $\mu$ converge pour tout y. L'intégrale de $\Lambda_\mu^{1/2}$ et une puissance quelconque de cette intégrale peuvent être développée en puissances de $\mu$. Introduisons les définitions suivantes :

$$\begin{cases} u_\mu(y) = \displaystyle\int_o^y \Lambda_\mu^{1/2}(x)\, dx \\ \Omega_\mu^{(1)}(y) = 1/2 \left\{ u_\mu^{2/3}, y \right\} \\ I_1(\mu) = \displaystyle\int_o^\infty |\Omega_\mu^{(1)}(y)|\, dy \end{cases} \tag{BIV.3}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = \left[\dfrac{k^2 a^2 s_2}{2z_1^2}\right]^{-1/5} \\ y_o = \tau_1/\tau_o \end{cases} \tag{BIV.4}$$

Il n'est pas difficile de montrer que $I_1(\mu)$ peut être développé en puissances de $\mu$, et peut être borné par un nombre $\bar{I}_1$ indépendant de $\mu$ et de l'ordre de l'unité.

Si nous utilisons la procédure habituelle pour obtenir le déphasage semi-classique, telle qu'elle est rappelée dans la section 5.1, le potentiel erreur est donné par (5.1.7) avec $\beta=1/2$, de sorte que l'erreur sur le déphasage est bornée par

$$|d\delta| < \frac{I_o}{1-I_o} \qquad \text{avec} \quad I_o < y_o^{5/3}\,\bar{I}_1 \tag{BIV.5}$$

Comme $\tau_1$ ne varie guère au voisinage du point critique, tandis que $\tau_o \to 0$ pour les valeurs de p telles que $t_\xi \tilde{<} t_o$, il en résulte que, lorsque $E \to E_c$, il existe une certaine valeur de p au voisinage du point critique pour laquelle la méthode habituelle pour obtenir le déphasage semi-classique est inapplicable.

Dans le domaine où $y_o > 1$, nous allons modifier la définition de $\phi$ de telle façon que la nouvelle fonction $\phi_3$, ait un zéro d'ordre 3 - naturellement cela entrainera une erreur supplémentaire dont il faudra tenir compte. Pour faire cela, rappelons d'abord qu'il résulte de (BIV.2) et (BIV.4) que :

$$k^2a^2\phi^2 = \tau_1^{-2}\; y_o^{-3}\; y(1+\mu y+y^2) \tag{BIV.6}$$

Posons ensuite $\zeta = y y_o^{-1}$. Une analyse rapide du problème montre qu'un choix convenable pour $\phi_3$ est

$$k^2a^2\phi_3^2 = \tau_1^{-2}\;\zeta^3\left[1 + y_o^{-2}\;\frac{\zeta^2}{1+\zeta^4} + \mu y_o^{-1}\;\frac{\zeta^3}{1+\zeta^4}\right] \tag{BIV.7}$$

et le potentiel d'erreur est borné par

$$\mathcal{R}_3(\zeta) \leq \tau_1^{-2}\left[\frac{y_o^{-2}\;\zeta+\mu\, y_o^{-1}\;\zeta^2}{1+\zeta^4} + \left\{1/2\;\; u_3^{2/5}\;,\;\zeta\right\}\right] \tag{BIV.8}$$

Pour $y_o > 1$, il est facile de vérifier que les conditions fixées dans l'appendice BI sont vérifiées. En utilisant alors les bornes (BI.6) dans (BI.7), on montre que $\left\{u_3^{2/5},\zeta\right\}$ est bornée pour tout $y_o > 1$ par une fonction sommable et plus précisément, pour les grandes valeurs de $y_o$ :

$$\left|\left\{u_3^{2/5},\;\zeta\right\}\right| \sim \mu y_o^{-1}\;\; K_1(\zeta) + y^{-2}\;K_2(\zeta) + K_3(\zeta)\;O(y_o^{-3})$$

où $K_1$, $K_2$, $K_3$ sont des fonctions sommables de $\zeta$. En utilisant des majorations analogues à (5.4.11) pour les fonctions d'onde non perturbées (reliées à des fonctions de Bessel d'ordre 1/5), nous

pouvons facilement montrer que la perturbation $|\rho_T|$ à l'amplitude de diffusion est bornée par $(A\, y_o^{-2} + B\, \mu\, y_o^{-1})$ où A et B sont des constantes, de l'ordre de 1. La valeur asymptotique du terme de Born quand $y_o \to \infty$ est aussi de cette forme. Pour $y_o \sim 1$, le potentiel erreur peut être évalué soit dans (BIV.2) soit dans (BIV.8). Il est borné, mais il n'est pas prouvé que la borne correspondante pour $|I_r(z)|$ soit plus petite que 1, de sorte que l'on ne peut pas nécessairement employer l'approximation de Born. De toute façon, on peut admettre que la variation de l'amplitude de diffusion qui est due au potentiel erreur est une fonction bornée et continue de $y_o, \rho(y_o)$, qui tend vers zéro comme $y_o^{5/3}$ quand $y_o \to 0$, et vers zéro (modulo un multiple de $\pi$) comme $\mu\, y_o^{-1} + y_o^{-2}$ quand $y_o \to \infty$.

Oscillations au voisinage du point critique

Puisque $y_o$ est une fonction de p, il est intéressant de chercher si le potentiel erreur peut modifier les oscillations dues au pic de $\delta'(p)$ au voisinage du point critique. Introduisons pour cela un nouveau paramètre $\bar{q}$, caractéristique de l'aplatissement de la surface, et égal à $(ka)^{-1}\, z^2/\tau_1^2$. Indiquons aussi les formules approchées suivantes qui nous seront utiles :

$$\begin{cases} H_1 = (\lambda_o\, \Delta\lambda)/s_o z_1 \sim \bar{q}^{-1} (t_o/\tau_1)^{-1/2} \\ \Delta_1 = (p_o - p_1)/\xi \sim \bar{q}\, (t_o/\tau_1)^3/(2\lambda_1) \end{cases} \qquad \text{(BIV.9)}$$

$$\tau_o \sim t_o\, (1 + 27/4\, \xi^2)^{1/6} \quad \mu y_o^{-1} \sim 3(t_o/\tau_1)\xi\, (1 + 27/4\, \xi^2)^{-1/3} \qquad \text{(BIV.10)}$$

Nous nous limiterons aux cas suivants :

1) $t_o \gg \tau_1$

La relation (BIV.5) est valable pour tout p. Ce domaine est celui où l'approximation JWKB donne de bons résultats, et où les corrections de 2ème ordre de la section 5.4 ont tout leur sens. Les oscillations qui pourraient provenir de la bosse de $\delta'(p)$ et de $\rho_T$ sont très amorties, sauf si $\bar{q}$ est très petit. L'amplitude d'oscillations éventuelles venant de $\rho(y_o)$ ne peut excéder une fraction $(\theta\, \bar{q}(\tau_1/t_o)^{7/6})$ des oscillations venant du pic de $\delta'(p)$ et sont donc négligeables. Par contre, l'ordre de grandeur des oscillations dues à ce pic est à peu près $(ka)^{1/2}\theta^{-1}(t_o/\tau_1)^{5/2}$ et peut donc être important dans ce domaine. Mais ce cas est sans intérêt pour la diffusion des neutrons, où $\bar{q} \gtrsim 1$ au voisinage du point critique.

2) $t_o \ll \tau_1$

La méthode de Chadan-Guennéguès cesse d'être valable dans un intervalle $\Delta p$ de p. Mais certaines remarques peuvent être faites, en utilisant la continuité de $\rho(y_o)$ et le fait que la largeur de $\Delta$ p est approximativement $\bar{q}$.

Pour $\bar{q} \ll 1$, une bosse dans $\Delta p$ peut donner des oscillations d'ordre $(ka)^{1/2}\,\bar{q}$, qui peuvent donc être plus grandes que les oscillations dues au pic (dont l'ordre est $\theta^{-1}(ka)^{1/2}(t_o/\tau_1)^{5/2}$ et donc négligeable).

Pour $\bar{q} \gtrsim 1$, $\rho(y_o)$ est une fonction très aplatie de p dans un intervalle $\Delta p$, de sorte que les oscillations qu'il peut produire sont fortement amorties. La seule modification aux oscillations du pic peut provenir de la bosse $y_o^{-2}$, au voisinage de $\xi = 0$. Mais elle ne donne qu'une faible fraction ($\sim \bar{q}\,\theta(t_o/\tau_1)^{5/2}$) de l'oscillation du pic. Dans ce cas physique, on voit que les oscillations dues au pic ont un maximum quelque part pour $t_o \sim \tau_1$ et disparaissent quand $E \to E_c$.

Nous concluerons de cette étude que les oscillations dues au voisinage du point critique sont compliquées, et en général assez petites, mais, pour des angles plus grands que l'angle arc-en-ciel, elles peuvent être la contribution la plus importante à l'amplitude de diffusion.

## APPENDICE C

Propriétés remarquables d'une amplitude de diffusion.

Dans cet appendice complémentaire, nous allons calculer exactement l'amplitude de diffusion qui correspond à l'exemple de la section 2.1. En effet, ce calcul est possible, ce qui est tout à fait remarquable. Toutefois, le résultat ne présente pas un très grand intérêt physique car le potentiel correspondant dépend fortement de l'énergie.

Introduisons d'abord les notations suivantes :

$$a = c_{\ell_o} \left(1 + \pi/2 \; c_{\ell_o}/(2\ell_o+1)\right)^{-1} \tag{C.1}$$

$$b = \left[(\ell_o + 1/2)^2 - ia\right]^{1/2} \qquad \text{Re } b > 0 \tag{C.2}$$

L'amplitude de diffusion peut s'écrire :

$$f(\theta) = (ik)^{-1} \sum_{o}^{\infty} (2\ell+1) \left(1 + i \operatorname{cotg} \delta_\ell\right)^{-1} P_\ell(\cos\theta) \tag{C.3}$$

où, conformément à (II.1.36)

$$\operatorname{cotg} \delta_\ell = \begin{cases} a^{-1}\left[(\ell_o + 1/2)^2 - (\ell + 1/2)^2\right] \text{ pour } |\ell-\ell_o| \text{ impair} \\ 0 \text{ autrement} \end{cases} \tag{C.4}$$

On distinguera donc 2 cas :

1) $\ell_o$ impair

De C.3, C.4, et de formules connues[26], on peut facilement déduire la relation suivante :

$$f(\theta) = -\frac{\pi\, a\, k^{-1}}{\sin(b-1/2)\pi/2} \int_o^\infty J_b(x)\, \frac{dx}{x} \sum_o^\infty (2\ell+1/2)(-1)^\ell\, J_{2\ell+1/2}(x)\, P_{2\ell}(\cos\theta) \qquad (C.5)$$

$$= \frac{-\pi\, a\, k^{-1}}{(2\pi)^{1/2} \sin(b-1/2)\pi/2} \int_o^\infty J_b(x)\ \cos(x|\cos\theta|)\, x^{-1/2}\ dx \qquad (C.6)$$

Cette intégrale peut être calculée [15] :

$$f(\theta) = \frac{-\pi\, a\, k^{-1}\, \Gamma(1/4+b/2)}{2\Gamma(1/2)\ \Gamma(3/4+b/2)\ \sin(b-1/2)\pi/2}\ {}_2F_1(1/4 + b/2\ ,\ 1/4 - b/2\ ;\ 1/2\ ;\ \cos^2\theta) \qquad (C.7)$$

Il est possible d'exprimer le résultat à l'aide de fonctions de Legendre [27] :

$$f(\theta) = \frac{\pi\, ak^{-1}}{2\cos b\pi} \left\{ {}_2F_1(b + 1/2\ ,\ 1/2 - b\ ;\ 1\ ;\ \sin^2\theta/2) + {}_2F_1(b + 1/2\ ,\ 1/2 - b\ ,\ 1\ ;\ \cos^2\theta/2 \right\}$$

ou

$$f(\theta) = \frac{\pi\, ak^{-1}}{2\cos b\pi} \left[ P_{b-1/2}(\cos\theta) + P_{b-1/2}(\cos(\pi-\theta)) \right] \qquad (C.8)$$

2) $\ell_o$ pair

Des formules connues [28] nous permettent d'obtenir de la même façon que ci-dessus :

$$f(\theta) = \frac{-\pi\, a\, k^{-1}\, \Gamma(b/2+3/4)\, \cos\theta}{\Gamma(1/2)\Gamma(b/2+1/4)\ \sin(b-3/2)\pi/2}\ {}_2F_1(3/4 + b/2\ ,\ 3/4 - b/2\ ;\ 3/2\ ;\ \cos^2\theta) \qquad (C.9)$$

Une transformation quadratique [29] nous permet d'exprimer ce résultat à l'aide de fonctions de Legendre :

$$f(\theta) = \frac{-\pi ak^{-1}}{2\cos b\pi} \left[ P_{b-1/2}(\cos\theta) - P_{b-1/2}(\cos(\pi-\theta)) \right] \qquad (C.10)$$

## REFERENCES DE L'INTRODUCTION

(1) JOHN HOPKINSON - Discours à l'Engineering Society (1892). JOHN HOPKINSON (1849-1898) est l'inventeur du moteur synchrone et du réseau triphasé, et auteur du "principe de superposition" des diélectriques.

(2) KIRCHHOFF - Cours de mécanique

(3) La première tentative pour obtenir un potentiel à partir de la théorie mésonique des forces nucléaires (elle-même due à Yukawa) est due à Maurice Lévy.:
M. LEVY - Phys. Rev. 88, 725 (1952) voir aussi
A. KLEIN - Phys. Rev. 89, 1158 (1953)

(4) NIELS BOHR - Nature 137, 344 (1936)

(5) H.A.BETHE - Rev. Mod. Phys. 9, 69 (1937)

(6) G. BREIT et E.P. WIGNER - Phys. Rev. 49, 519, 642 (1936)

(7) V.F. WEISSKOPF - Phys. Rev. 52, 295 (1937)

(8) Pour une étude d'ensemble, on consultera avec profit le livre de FRIEDMAN et WEISSKOPF : Niels Bohr and the Development of Physics (Pergamon Press, London, 1955) - voir aussi
E.P. WIGNER Amer. Journ Phys. 23, 371 (1955)

(9) P.L. KAPUR and R.E. PEIERLS - Proc. Roy. Soc. (London) , A 166 , 277 (1938) et Proc. Cambridge Phil. Soc. 44,242 (1947)
G. BREIT - Phys. Rev. 58, 506 (1940) et 69 , 472 (1946)
E.P. WIGNER - Phys. Rev. 70, 15 (1946) et 70, 606 (1946)

(10) E.P. WIGNER and L. EISENBUD - Phys. Rev. 72, 29 (1947)- 2 articles complets sur la matrice R ont été écrits :
A.M. LANE and R.G. THOMAS - Rev. Mod. Phys. 30, 257 (1958)
G. BREIT - Handbuch der Physik XLI/1

(11) HODGSON - The optical of elastic scattering Oxford (1963)

(12) Voir par exemple Bruecker and Levinson - Phys. Rev. 97, 1344 (1955)
L. ROSENFELD - Nuc. Phys. 26, 594 (1961)
B. JANCOVICI - Thèse de Doctorat d'Etat
L. VERLET et J. GAVORET - Nuov. Cim. 10, 505 (1958)

(13) Voir Article de Revue de EISBERG et PORTER Rev. Mod. Phys. 33, 190 (1961)- Pour un calcul de la partie réelle du potentiel pour une particule α voir H. WITTERN - Nuc. Phys. 62, 628(1965)

(14) F.G. PEREY and B. BUCK - Nucl. Phys. 32 , 353 (1962)
N. AUSTERN - Phys. Rev. 137, B 752 (1965)

(15) FADDEIEV L.D. - Uspekhi Matem Nauk 14, II, 57 (1959) traduit en anglais: J. Math. Phys. 4, 72 (1963)
Dans cet article de revue très bien fait, on trouvera des références aux travaux antérieurs
Voir aussi
V. de ALFARO et T. REGGE - Potential Scattering - North Holland (1965)

## REFERENCES DE LA 1ère PARTIE


(1) WU et OHMURA - Quantum theory of Scattering (Prentice-Hall)(1962) p. 100 et suivantes.

(2) J.A. WHEELER - Phys. Rev. 99, 630 (1955)

(3) T. REGGE - Nuov. Cim. 14, 951 (1959)

(4) A. MARTIN et G.Y. TARGONSKI - Nuov. Cim. 20, 1182 (1961)

(5) R.G. NEWTON - J. Math. Phys. 3, 75 (1962)

(6) BATEMAN manuscript project, Higher Transcendental Functions (Mc Graw Hill Book C° New York 1953) désigné dans la suite par HTF, suivi éventuellement du numéro de la formule utilisée

(7) HARDY, LITTLEWOOD, POLYA - Inequalities Cambridge (1959)

(8) HTF 7.7.(29)

(9) HTF 7.14(32)

(10) HTF 7.15 (2)

(11) HTF 7.7 (30)

(12) HTF 7.13 (3)

(13) HTF 1.18 (4)

(14) F.G. TRICOMI Integral equations (Interscience Publ. New York) (1957)

(15) LAURENT SCHWARTZ - Méthodes mathématiques pour les sciences physiques - Hermann Paris (1961) p. 62 et 33

(16) Référence (14) p. 65

(17) TITCHMARSH. Theory of functions Oxford 1932 - p. 74

(18) RIESZ et NAGY - Leçons d'analyse fonctionnelle - Académie des Sciences de Hongrie

(19) Référence précédente, p. 174

(20) D. BESSIS - Nuov. Cim. 23, 797 (1964)

(21) CARATHEODORY Theory of functions of a complex variable Chelsea Publish. New York (1958)

(22) A. MARTIN - Progress in element ary particles and Cosmic ray Physics (1965) chap.I p. 54.

(23) Référence (17) p. 88

(24) CHADAN - Nuov. Cim. 39, 670 (1965)

## REFERENCES DE LA DEUXIEME PARTIE

(1) On trouvera pour les problèmes de diffraction proprement dits une bonne étude mathématique et un aperçu des travaux antérieurs à 1956 dans l'article de J.B.KELLER "Asymptotic solution of some diffraction problems". Comm on Pure and Applied Mathematics Vol. IX - 207-265 (1956) Pour la méthode JWKB, l'étude la plus complète nous parait être celle de HEADING (An introduction to phase integral method - Methuen (London) 1962). Une approche non classique de la méthode a été développée récemment par N. FROMAN et P.O. FROMAN (JWKB approximation - North Holland 1965). Ces deux ouvrages contiennent de nombreuses références aux travaux antérieurs. Ces références ne sauraient être exhaustives.

(2) H.C. VAN DE HULST "Light Scattering by small particles" Wiley New York (1957)
Voir aussi l'article de S.I. RUBINOW : Ann. Phys. 14, 305 (1961)

(3) L. BRILLOUIN - Wave Propagation and Group Velocity - Ac. Press New York (1960)

(4) J.B. KELLER - Surface waves on water of non-uniform depth. Journal of fluid mechanics Vol.4, Part.6, 607. On trouvera dans ce travail référence aux principaux travaux antérieurs.

(5) Une partie de ce programme a été toutefois effectuée par J.B. KELLER et son équipe (références (1), (2), (4)).

(6) H. JEFFREYS - Proc. Lond. Math. Soc. 23 (2) 428 (1923)
WENTZEL G. Zeit. f. Phys. 38, 518 (1926)
KRAMERS H.A. Zeit. f. Phys. 39, 828 (1926)
BRILLOUIN L. CR. Acad. Sc. 183, 24 (1926)

(7) LIOUVILLE J. - J. Math. Pures Appl. 2, 16 (1837) - G. GREEN - Camb. Phil. Trans. 6,457(1837)

(8) R.E. LANGER - Trans Amer Math Soc. 34, 447 (1932)
Trans Amer Math Soc. 36, 90 (1934)
Phys. Rev. 51, 669 (1937)
Trans Amer Math Soc 67, 461 (1949)

(9) F.W.J. OLVER - Proc. Camb. Phil. Soc. 57, 790 (1961)
Voir aussi A. ERDELYI - Journ. Math. Phys. 1, 16 (1960)

(10) La méthode JWKB a été appliquée dans des domaines aussi variés que la propagation des ondes radio, la traversée des barrières de potentiel et la fission nucléaire, la diffraction acoustique dans un milieu inhomogène et l'hydrodynamique. On se reportera au chapitre I du livre de HEADING [1] pour en avoir une idée, malheureusement très inégale.

(11) M. ROSEN et D.R. YENNIE - Journ. Math. Phys. 5, 1505 (1965)

(12) Pierre C. SABATIER - Nuov. Cim. 37, 1180 - 1226 (1965)

(13) Voir par exemple
LANDAU & LIFSCHITZ - Quantum mechanics - Pergamon Press. N.Y. (1958)

(14) K.W. FORD et J.A. WHEELER - Ann. Phys. 7, 259, 287 (1959)

(15) R.B. BERNSTEIN - Quantum effects in elastic molecular scattering - dans "Molecular Beams" Wiley, New York (Advances in Chemical Physics - 1965)

(16) A. ZUCKER - Ann. Rev. Nuc. Sc. 10, 27 (1960)
R.M. EISBERG et C.E. PORTER - Rev. Mod. Phys. 33 , 190 (1961)

(17) J. ALSTER - Communication privée -
Voir aussi la première référence (21) page 283.

(18) A. AKHIEZER et I. POMERANCHUK - J. Phys. (U.R.S.S.) 9 , 471 (1945)
J.S. BLAIR - Phys. Rev. 95 , 1218 (1954)

(19) PIERRE C. SABATIER - C.R. Acad. Sc. 257, 2406 (1963)

(20) On consultera en particulier :
Proc. Second Conf. Reactions between Complex Nuclei Gattlinburg, 1960, Editeur : Wiley (New York) 1960

(21) W.E. FRAHN et R.H. VENTER - Ann. Phys. 24, 243 (1963)
R.H. VENTER - Ann. Phys. 25, 405 (1963)
W.E. FRAHN et R.H. VENTER - Ann. Phys. 27, 135 (1964)
R.H. VENTER et W.E. FRAHN - Ann. Phys. 27, 135 (1964)

(22) Voir références (16), (20) et (45) ci-dessous.

(23) K.W. FORD et J.A. WHEELER ont indiqué sans la développer une manière d'introduire l'absorption.

(24) J.A. WHEELER - Phys. Rev. 99, 630 (1955)

(25) L. LANDAU et E. LIFCHITZ - Mécanique - Editions de la paix (Moscou)

(26) Le contenu et les figures de cette étude sont basés sur les articles de FORD et WHEELER [14] et d'EISBERG et PORTER [16]. Les figures 4 et 5 ont été empruntées à l'ouvrage de VAN de HULST [2].

(27) Handbook of mathematical functions.
National Bureau of Standards AMS 55 Washington (1964)

(28) K.W FORD, D.L. HILL, M. WAKANO, et J.A. WHEELER - Ann. Phys 7 , 239 (1959)

(29) R.E. LANGER - Trans. Amer. Math Soc. 34, 447 (1932)

(30) E. JAHNKE et F. EMDE Tables of functions p. 146 (New York, 1945)

(31) CARATHEODORY. Theory of functions of a complex variable Chelsea Publish. New York (1958)

(32) R.E. LANGER - Phys. Rev. 51, 669 (1937)

(33) Ce résultat est obtenu de façon plus directe par A. ERDELYI [9].

(34) Cette terminologie est celle de TITCHMARSH (Theory of functions Oxford 1932)

(35) T.A. ERIKSSON et G.A. RINANDER Ark. f. Fys. 24, 1 (1962) voit aussi
T.Y. WU et T. OHMURA - Quantum theory of scattering (Englewood Cliffs N.J. 1962)

(36) A. ERDELYI - Asymptotic expansions (New York 1956)

(37) M.A. EVGRAFOV. Asymptotic estimates and entire functions (New York 1961)

(38) R. GLAUBER - Lectures in theoretical Physics I (Interscience Publ. New York 1959)
Voir aussi G. MOLIERE - Zeits Naturfosch. 2a , 133 (1947)

(39) K. CHADAN et J.Y GUENNEGUES - Nuov. Cim. 34, 665 (1964)

(40) C.E. HECHT et J.E. MAYER - Phys. Rev. 106, 1156 (1957) ont donné un calcul du déphasage un peu semblable.

(41) Il est possible d'obtenir une formule analogue à (V.4.27), sauf remplacement de la fonction logarithme par une fonction puissance, si on donne à $\chi(x)$ et $\overline{\chi}(\overline{z})$ la forme $\alpha/z^2$, où $\alpha$ peut d'ailleurs être une fonction de p. Ceci peut permettre l'étude de corrections aux approximations des fonctions d'onde coulombiennes (voir par exemple M.H. HULL et G. BREIT : Handbuch der Physik Vol 41/1 p. 453 (Berlin(1960))

(42) Ce calcul a été fait également par ROSEN et YENNIE : Journ. Math. Phys. 5 , 1505 (1964)

(43) Le calcul des ordres supérieurs du déphasage a été effectué par d'autres méthodes - Voir par exemple :
L. BERTOCCHI, S. FUBINI et G. FURLAN - Nuov. Cim. 34, 599 (1965)

(44) C. VALIRON Bull. Sci. Math. (2) 49, 181, 203 (1925)
voir aussi la référence (24) de la 1ère partie.

(45) C.R. GRUHN et N.S. WALL Tech. Rept 528 - University of Maryland - Nov 1965
PIERRE C. SABATIER - Proc. Paris Conf (1964) 473

(46) L. RODBERG - Nuc. Phys. 15, 72 (1960)
G.E. BROWN - Rutherford Laboratory Symposium - NIRL/R/ 16, 31

(47) P.E. HODGSON - The optical model of elastic scattering (Oxford 1963)

## REFERENCES DES APPENDICES

HTF - Ce sigle renvoie à l'ouvrage "Higher Transcendental functions" (Bateman Manuscript Project)(Mac Graw Hill, New York 1953).

I.T - Ce sigle renvoie à l'ouvrage "Integral Transforms" du "Bateman Manuscript Project" (Mac Graw Hill - New York 1953)

HMF - Ce sigle renvoie à Handbook of mathematical functions NBS. AMS55 (Washington 1964)

(1) HTF 7.13 (3)

(2) G.N. WATSON - A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1962 - p. 206

(3) HTF 7.13 (32)

(4) HTF 7.13 (34)

(5) HTF 7.2 (12) et (13)

(6) HTF 7.2 (3)

(7) HTF 7.15 (13)

(8) HTF 7.14 (21) et erratum de HTF

(9) HMF 11.1.2

(10) On trouvera un calcul d'intégrales de ce type dans l'article de V.M. KISLER : Prikl. Math. Mech. Vol. 24 n° 3, 1960 p. 496-503 - traduit dans le Journal of Appl. Math. and Mech. - même référence.

(11) HTF 7.7 (11) et HMF 12.1.19

(12) HMF 11.4.9

(13) HMF 12.1.32

(14) HMF 12.1.29

(15) HTF 7.7 (29)

(16) HTF 7.7 (29) et HTF 3.2(20)

(17) HTF 3.12(15)

(18) HTF 7.7 (29) HTF 2.11(10), HTF 2.8(20) et HTF 3.2(14)

(19) HTF 7.7 (30)

(20) HTF 7.2 (56)

(21) HTF 7.7 (11)

(22) IT 8.11 (3)

(23) E.L. INCE - Ordinary differential equations p. 396 New York 1956

(24) LOUIS ROBIN - Fonctions sphériques de LEGENDRE et fonctions sphéroïdales - Tome II (Paris 1958) formule 271

(25) HTF 7.8 (15)

(26) HTF 7.14 (32) et 7.15 (44)

(27) HTF 2.11(7) et 3.2(14)

(28) HTF 7.14(32) et 7.15(45)

(29) HTF 2.11(9) et 3.2(14)

## DEUXIÈME THÈSE

*PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE*

# CONTRIBUTIONS THEORIQUES RECENTES A L'EQUATION DE VAN DER WAALS : LE MODELE DE KAC

Vu et approuvé :
Orsay, le 23 Mars 1966
*Le Doyen de la Faculté des Sciences,*
Joseph BERGERARD

Vu et permis d'imprimer :
*Le Recteur de l'Académie de Paris,*
Jean ROCHE